Presecajući broj proizvoda grafova

Eva Silađi
Gimnazija Jovan Jovanović Zmaj, Novi Sad

Momčilo Topalović
Matematička gimnazija, Beograd

Bojan Bašić
Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Uvod

Graf predstavlja uređeni par (V, E) gde je V skup čvorova, a $E \subset \binom{V}{2}$ skup ivica. Pod crtanjem $\mathcal{D}_S(G)$ grafa G po nekoj površini S podrazumevamo ono što intuitivno odgovara crtanju grafa po nekoj površini:

- Nikoja dva čvora se ne slikaju u istu tačku;
- Svaka ivica $\{a, b\}$ se slika u neku neprekidnu krivu izmedju slika čvorova a i b;
- Nikoje tri ivice se ne seku u istoj tački koja nije slika ni jednog čvora;
- Ni jedna ivica $\{a, b\}$ ne sadrži sliku čvora koje nije a ili b.

Pod presekom smatramo tačku, koja nije slika ni jednog čvora, kroz koju prolaze dve ivice.

Pod presecajućim brojem $\mathrm{cr}_S(G)$ datog grafa G na površi S smatramo minimalni broj preseka koji možemo da postignemo crtajući G po S.

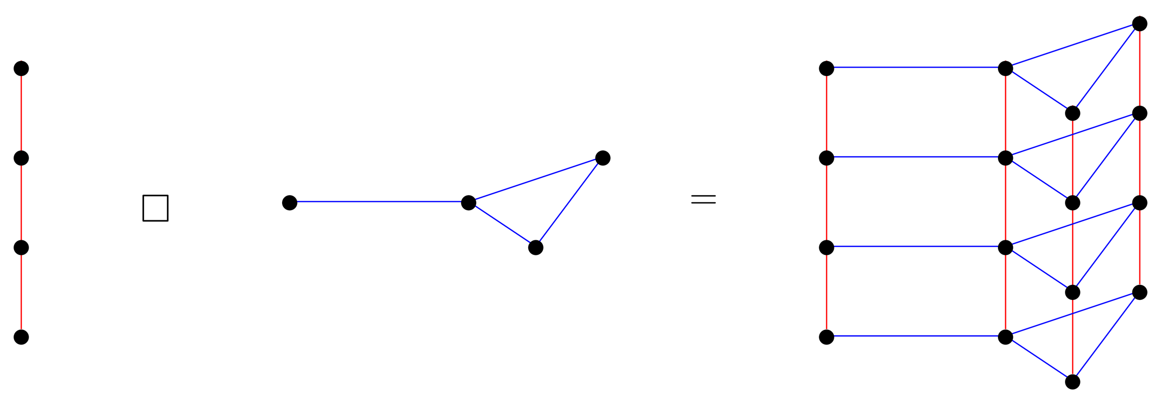
$$\mathrm{cr}_S(G) = \min_{\mathcal{D}_S(G)} \mathrm{cr}\big(\mathcal{D}_S(G)\big)$$

Za data dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ definišemo njihov Dekartov proizvod kao

$$G_1 \,\square\, G_2 = \big(V_1 \times V_2, P_1 \cup P_2\big),$$

gde su

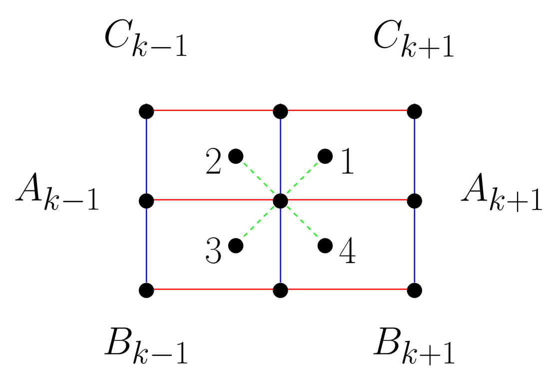
$$P_1 = \Big\{\big\{(u, v_1), (u, v_2)\big\} \;\big|\; u \in V_1, \{v_1, v_2\} \in E_2\Big\},$$
$$P_2 = \Big\{\big\{(u_1, v), (u_2, v)\big\} \;\big|\; v \in V_2, \{u_1, u_2\} \in E_2\Big\}.$$



Slika 1: $P_2 \,\square\, G$

Rezultati na ravni

Posmatrajmo crtanje grafa $Y \,\square\, P_n$ po ravni.
Primetimo da broj preseka između grafova Y_k i Y_{k+1} zavisi od položaja tačke D_k.



Slika 2: Moguće pozicije tačke D_k

Kao rezultat imamo sledeći sistem rekurentnih jednačina:

$$\begin{aligned}
d_{k+1,1} &\geq \min\big\{d_{k,1}+1, d_{k,2}+2, d_{k,3}+2, d_{k,4}+2\big\};\\
d_{k+1,2} &\geq \min\big\{d_{k,1}+0, d_{k,2}+2, d_{k,3}+2, d_{k,4}+2\big\};\\
d_{k+1,3} &\geq \min\big\{d_{k,1}+2, d_{k,2}+2, d_{k,3}+2, d_{k,4}+0\big\};\\
d_{k+1,4} &\geq \min\big\{d_{k,1}+2, d_{k,2}+2, d_{k,3}+2, d_{k,4}+1\big\},
\end{aligned}$$

gde $d_{k,i}$ predstavlja presecajući broj grafa $Y \,\square\, C_k$ ako je pozicija D_k baš i. Odavde vidimo da važi:

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{E}^2}(Y \,\square\, C_n) \geq \min_i d_{n,i} \geq n-1.$$

Glavni rezultat

Primetimo da važi da zatvorena kriva deli površ torusa na dve regije.
Međutim, ako su već dati veliki i mali krug, svaka sledeća kriva ili

(a) Seče neki od krugova ili

(b) Deli površ torusa na dve regije.

Sledi da na torusu važi slična rekurentna jednačina, samo što na najviše dva mesta možemo da zanemarimo skok.

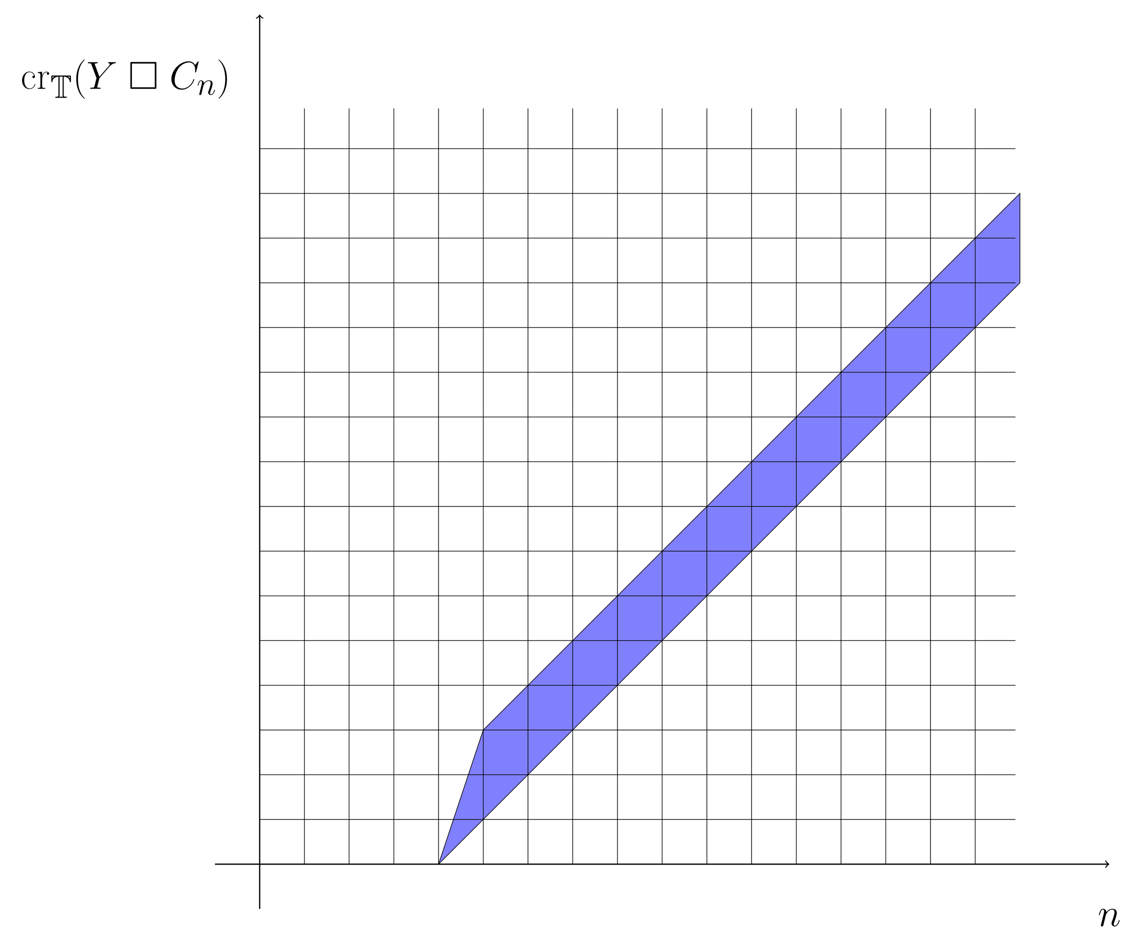
Teorema

Za $n > 4$ važi da je

$$n - 4 \leq \mathrm{cr}_{\mathbb{T}}(Y \,\square\, C_n) \leq n - 2,$$

dok za $n \leq 4$ važi

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{T}}(Y \,\square\, C_n) = 0.$$



Slika 3: $\mathrm{cr}_{\mathbb{T}}(Y \,\square\, C_n)$ u zavisnosti od n

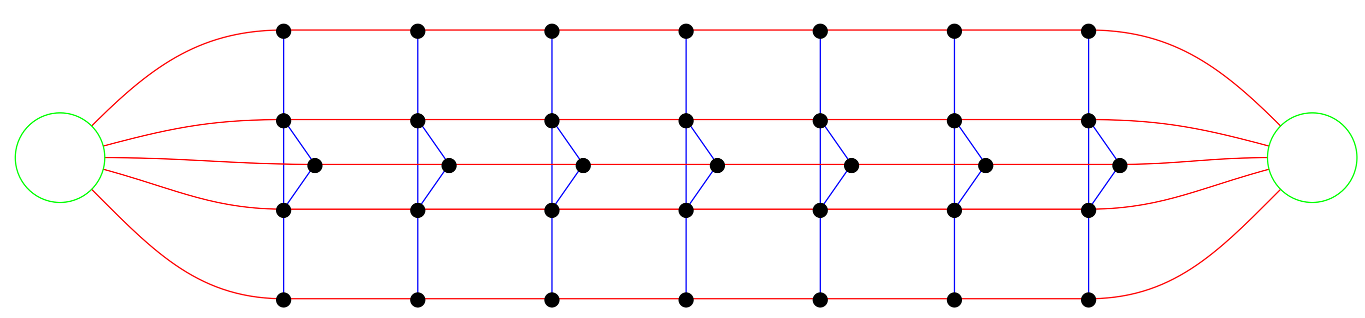
Posledice

Ako je G nadgraf grafa Y važi:

$$\mathrm{cr}_{\mathbb{T}}(G \,\square\, C_n) \geq n - 4.$$

Ova prilično jednostavna lema nam kao posledicu daje donje ograničenje za presecajući broj čitave klase grafova. Takođe, neki grafovi G iz te klase imaju crtanje sa $n-2$ preseka, pa za njih važi ista nejednakost koja važi i za $Y \,\square\, C_n$:

$$n - 4 \leq \mathrm{cr}_{\mathbb{T}}(G \,\square\, C_n) \leq n - 2.$$



Slika 4: Primer takvog grafa G

Reference

[1] Marián Klesc, Jana Petrillová, and Matús Valo. On the crossing numbers of cartesian products of wheels and trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 37(2):399–413, 2017.

[2] Marián Klesc and Jana Petrillová. The crossing numbers of products of path with graphs of order six. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 33(3):571–582, 2013.

[3] Drago Bokal. On the crossing numbers of cartesian products with trees. *Journal of Graph Theory*, 56(4):287–300, 2007.

[4] Marián Klesc. Some crossing numbers of products of cycles. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 25(1-2):197–210, 2005.

[5] Marián Klesc, R. Bruce Richter, and Ian Stobert. The crossing number of $C_5 \,\square\, C_n$. *Journal of Graph Theory*, 22(3):239–243, 1996.

[6] Marián Klesc and Stefan Schrötter. On the crossing numbers of cartesian products of stars and graphs of order six. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 33(3):583–597, 2013.

[7] Emilia Drazenská and Marián Klesc. On the crossing numbers of $G \,\square\, C_n$ for graphs G on six vertices. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 31(2):239–252, 2011.

[8] Marián Klesc and Stefan Schrötter. The crossing numbers of join products of paths with graphs of order four. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 31(2):321–331, 2011.