



## Luda rešenja Košijeve funkcionalne jednačine

1. Odrediti sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  za koje važi:

a) za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi:  $f(3x + 1) = 5x + 2$ ;

b) za svako  $x \in \mathbb{R}$  važi:  $f(x^2 + 1) = \frac{x^2 - 3}{5}$ ;

c) za svako  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  važi:  $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

2. Odrediti sve funkcije  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za svako  $x, y \in \mathbb{Q}$  važi:

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (\text{KFJ})$$

3. Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koja zadovoljava KFJ. Ukoliko važi bilo koji od navedenih uslova:

a)  $f$  je neprekidna na  $\mathbb{R}$ ;

b)  $f$  je neprekidna u nekoj tački  $x_0 \in \mathbb{R}$ ;

c)  $f$  je monotona na  $\mathbb{R}$ ;

d) postoji interval  $(a, b)$  na kome je  $f$  monotona;

e) postoji interval  $(a, b)$  na kome je  $f$  ograničena;

f)  $f$  je ograničena na skupu  $E$  koji zadovoljava sledeću osobinu: postoji  $\delta_E > 0$  takav da se među razlikama  $\{|x - y| : x, y \in E\}$  nalaze svi brojevi  $[0, \delta_E]$ , tj.  $[0, \delta_E] \subseteq \{|x - y| : x, y \in E\}$ ,

dokazati da je funkcija  $f$  jednaka  $f(x) = cx$ , za neko  $c \in \mathbb{R}$ .

4. Neka je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa:

$$f(x) = \begin{cases} r_1 + 15r_2, & \text{ako je } x = r_1 + r_2\sqrt{2}, \text{ gde su } r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Da li je  $f$  dobro definisana funkcija? Pokazati da  $f$  zadovoljava KFJ na  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  ali ne i na  $\mathbb{R}$ .

5. Dokazati da postoji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koja je rešenje KFJ, ali koja nije linearna. Opisati sva rešenja KFJ.

6. Neka je  $f$  nelinearno rešenje KFJ. Tada:

a)  $f$  ima prekid u svakom realnom broju;

b)  $f$  je neograničena na svakom intervalu;

c) grafik funkcije  $f$  je gust u skupu  $\mathbb{R}^2$ .

7. Pokazati da postoji funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (bilo kakva) čiji grafik preseca svaku pravu u ravni. Zapravo, pokazati da postoji rešenje KFJ čiji grafik preseca grafik svake neprekidne funkcije na  $\mathbb{R}$ .