IS Petnica, seminar MATEMATIKE
Letnji MAT2, 2018
Predavanje
Marko Đikić, Prirodno-matematički fakultet u Nišu

Reče li on vektorski prostor?

1 Linearne kombinacije i linearna nezavisnost

1. Zapisati naredni sistem jednačina preko množenja matrica:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ & - & y & & & = & 7 \\ x & & & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

2. Da li je petorka $(0,0,0,0,0)$ u „dometu“ petorki $(1,0,-7,2,5)$ i $(10,2,2,0,3)$. A petorka $(-8,-2,-16,4,6)$? Da li je $(-8,-2,-16,4,6)$ u „dometu“ petorki $(1,0,-7,2,5)$, $(10,2,2,0,3)$ i $(12,2,-12,4,13)$?

3. Da li su trojke $(4,-2,6)$ i $(6,-3,9)$ linearno nezavisne? Da li su trojke $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,1,1)$ linearno zavisne?

4. Poznato je da se vektor $\vec{y}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ na jedinstven način. Dokazati da to važi i za svaki drugi vektor $\vec{y}'$ koji se može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{x}_i$.

5. Zašto u prostoru $\mathbb{R}^{10}$ nema 11 linearno nezavisnih vektora?

6. Neka su $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ linearno nezavisni vektori i neka su vektori $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m$ takvi da je svaki vektor $\vec{x}_i$ neka linearna kombinacija vektora $\vec{y}_j$. Tada je $m \geq n$.

7. Koliko različitih linearnih kombinacija vektora $(0,0,1,0,1)$ i $(1,1,1,1,0)$ postoji u vektorskom prostoru $\mathbb{F}_2^5$? Koji vektor bi zajedno sa vektorom $(0,0,1,0,1)$ činio linearno zavisan sistem u $\mathbb{F}_2^5$?

8. Koliko najviše linearno nezavisnih kolona možemo da izaberemo u narednoj matrici? Da li bi se odgovor promenio ako bismo drugu kolonu pomnožili sa -5? A šta ako drugu vrstu pomnožimo sa 3?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -13 & 26 \\ -2 & -2 & 0 & 21 & -42 \\ 3 & 6 & 0 & -42 & 86 \\ 1 & 0 & 0 & -14 & 28 \end{bmatrix}.$$

9. Kako u terminima ranga matrice opisati da li sistem linearnih jedničina (recimo onaj iz prvog zadatka) ima rešenja?

10. Dokazati da je $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ i $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

11. Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ dve matrice dimenzije 10×10, za koje važi $a_{ij} = b_{ij} + 1$, za svako $i, j = \overline{1, 10}$. Ako je A^3 nula matrica, dokazati da B nije regularna matrica.

2 Zadaci

1. U svako polje table 10×10 upisan je znak X (iks) ili O (oks). U jednom potezu dozvoljeno je promeniti znak u svakom polju jedne vrste, ili u svakom polju jedne kolone. U početku je tablica bila popunjena tako da se nakon 2018 poteza može dobiti tablica u kojoj su na svim poljima isti znaci. Dokazati da se ovo moglo postići i nakon najviše 10 poteza.

2. Ne su $a_1, a_2, ..., a_{20}$ prirodni brojevi koji su delioci broja 70!. Dokazati da možemo odabrati jedan, ili nekoliko od ovih brojeva, tako da je njihov proizvod potpun kvadrat prirodnog broja.

3. U gradu sa n stanovnika postoji m biblioteka. U svaku biblioteku je učlanjen neparan broj stanovnika, a svake dve biblioteke imaju paran broj zajedničnih članova. Dokazati da je $m \leq n$.

4. Nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljavaju sledeće jednakosti:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazati da su ova tri niza konvergentna.

5. Dokazati da se provougaonik stranice 1 i x, pri čemu je x iracionalan broj, ne može popločati pomoću konačno mnogo kvadrata.

6. Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi za koje važi: $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$ i $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$. Koja je najveća moguća vrednost izraza $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$?

7. Robot se kreće po brojevima realne prave na sledeći način: ako se nalazi u tački $\frac{p}{q}$, u sledećem potezu može preći u tačku $\frac{p+nq}{q+np}$ za bilo koji prirodan broj n. Na početku se nalazi u tački 2018.

a) Dokazati da, nakon nekoliko poteza, robot može da stigne u tačku 2.

b) Koliko najmanje poteza mu treba?

8. Permutaciju $a_1, a_2, ..., a_n$ brojeva $1, 2, ..., n$ zovemo k-limitirana akko važi $|a_i - i| \leq k$, za svako $i = \overline{1, n}$. Da li je broj 3-limitiranih permutacija brojeva $1, 2, ..., 10$ paran ili neparan?

Nekoliko referenci

1. Matoušek, J. *Thirty-three Miniatures. Mathematical and Algorithmic Application of Linear Algebra.* AMS. 2010.

2. Stack Exchange - Mathematics. https://math.stackexchange.com/questions/35451/fun-linear-algebra-problems

3. Putnam 2008, B6. https://kskedlaya.org/putnam-archive/2008s.pdf