Algebra Rubikove kocke

Tamara Krivokuća

IS Petnica

tamarakrivokuca@gmail.com

23.07.2018.

O čemu ćemo danas pričati...

1. Kratak istorijat
2. Algebra
   - Osnovni pojmovi
   - Generatori i ciklične grupe
   - Simetrična grupa
3. Rubikova kocka
   - Oznake
   - Grupa Rubikove kocke
   - Konfiguracije

KRATAK ISTORIJAT

Kratak istorijat

- Rubikovu kocku je izumeo mađarski arhitekta Erno Rubik 1974. godine.
- On ju je nazvao "Magična kocka", ali je ime promenjeno kad je puštena u prodaju.
- Na tržistu se pojavila u maju 1980. godine, postala je popularna krajem te godine, i dobila mnoge nagrade.
- Između 1980. i 1983. prodato 200 miliona kocaka.
- Do danas prodato preko 350 miliona kocaka.
- Spidkjubing - trenutni rekord 4.22 sekunde!

ALGEBRA

Osnovni pojmovi

Definicija 1

Grupa $(G, \cdot)$ je neprazan skup G sa binarnom operacijom $\cdot$ koja zadovoljava sledeće osobine:

Osnovni pojmovi

Definicija 1

Grupa $(G, \cdot)$ je neprazan skup G sa binarnom operacijom $\cdot$ koja zadovoljava sledeće osobine:

1. Zatvorenost operacije: Ako $a, b \in G$ onda $a \cdot b \in G$

Osnovni pojmovi

Definicija 1

Grupa $(G, \cdot)$ je neprazan skup G sa binarnom operacijom $\cdot$ koja zadovoljava sledeće osobine:

1. Zatvorenost operacije: Ako $a, b \in G$ onda $a \cdot b \in G$
2. Asocijativnost: Za sve $a, b, c \in G$ važi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Osnovni pojmovi

Definicija 1

Grupa $(G, \cdot)$ je neprazan skup G sa binarnom operacijom $\cdot$ koja zadovoljava sledeće osobine:

1. Zatvorenost operacije: Ako $a, b \in G$ onda $a \cdot b \in G$
2. Asocijativnost: Za sve $a, b, c \in G$ važi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Neutralni element: Postoji $e \in G$ takvo da $a \cdot e = e \cdot a = a$, za svako $a \in G$

Osnovni pojmovi

Definicija 1

Grupa $(G, \cdot)$ je neprazan skup G sa binarnom operacijom $\cdot$ koja zadovoljava sledeće osobine:

1. Zatvorenost operacije: Ako $a, b \in G$ onda $a \cdot b \in G$
2. Asocijativnost: Za sve $a, b, c \in G$ važi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Neutralni element: Postoji $e \in G$ takvo da $a \cdot e = e \cdot a = a$, za svako $a \in G$
4. Inverzni element: Za svako $a \in G$ postoji $b \in G$ takvo da $a \cdot b = b \cdot a = e$
   (za svako a odgovarajući inverz označavamo sa a^{-1})

Skup G se naziva **nosač grupe**.

Osnovni pojmovi

Definicija 2

Ako u grupi $(G, \cdot)$ važi komutativnost, odnosno za sve $a, b \in G$:

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

kažemo da je grupa **Abelova**.

Osnovni pojmovi

Definicija 2

Ako u grupi $(G, \cdot)$ važi komutativnost, odnosno za sve $a, b \in G$:

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

kažemo da je grupa **Abelova**.

Definicija 3

Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Za neprazan podskup H skupa G kažemo da je **podgrupa** grupe G ako je i sam grupa. Pišemo $H \leq G$.

Osnovni pojmovi

Definicija 2

Ako u grupi $(G, \cdot)$ važi komutativnost, odnosno za sve $a, b \in G$:

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

kažemo da je grupa **Abelova**.

Definicija 3

Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Za neprazan podskup H skupa G kažemo da je **podgrupa** grupe G ako je i sam grupa. Pišemo $H \leq G$.

Deinicija 4

Red grupe $(G, \cdot)$, u oznaci $|G|$, je kardinalnost skupa G. Kažemo da je grupa **konačna** ako je $|G| < \infty$.
Red elementa $a \in G$ je najmanji prirodan broj n takav da $a^n = e$.

Generatori i ciklične grupe

Lema 1

Neka je $(G, \cdot)$ grupa, i $S \subseteq G$, neprazan. Skup

$$H = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n \,|\, s_i \in S \cup S^{-1}, \; i = 1, \ldots, n, \; n \in \mathbb{N}\}$$

čini podgrupu grupe G.
$(S^{-1} = \{s^{-1} \,|\, s \in S\})$

Generatori i ciklične grupe

Lema 1

Neka je $(G, \cdot)$ grupa, i $S \subseteq G$, neprazan. Skup

$$H = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n \mid s_i \in S \cup S^{-1},\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

čini podgrupu grupe G.
$(S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\})$

Definicija 5

Za podgrupu H iz leme 1 kažemo da je **generisana** elementima iz S, odnosno S je **skup generatora** podgrupe H, u oznaci $H = \langle S \rangle$.

Generatori i ciklične grupe

Lema 1

Neka je $(G, \cdot)$ grupa, i $S \subseteq G$, neprazan. Skup

$$H = \{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n \,|\, s_i \in S \cup S^{-1},\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

čini podgrupu grupe G.
$(S^{-1} = \{s^{-1} \,|\, s \in S\})$

Definicija 5

Za podgrupu H iz leme 1 kažemo da je **generisana** elementima iz S, odnosno S je **skup generatora** podgrupe H, u oznaci $H = \langle S \rangle$.

Napomena: Za $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ pišemo $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Definicija 6

Grupa $(G, \cdot)$ je **ciklična** ako postoji $g \in G$ takvo da $G = \langle g \rangle$.

Definicija 6

Grupa $(G, \cdot)$ je **ciklična** ako postoji $g \in G$ takvo da $G = \langle g \rangle$.

Lema 2

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $g \in G$. Tada postoji prirodan broj n takav da je $g^n = e$. Takođe, $g^{-1} = g^{n-1}$.

Definicija 6

Grupa $(G, \cdot)$ je **ciklična** ako postoji $g \in G$ takvo da $G = \langle g \rangle$.

Lema 2

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $g \in G$. Tada postoji prirodan broj n takav da je $g^n = e$. Takođe, $g^{-1} = g^{n-1}$.

Lema 3

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Tada $G = \langle S \rangle$ akko svaki element iz G može da se napiše kao konačan proizvod elemenata iz S (Dakle, nisu nam potrebni inverzni elementi elemenata iz S).

Lema 3

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Tada $G = \langle S \rangle$ akko svaki element iz G može da se napiše kao konačan proizvod elemenata iz S (Dakle, nisu nam potrebni inverzni elementi elemenata iz S).

Dokaz:

- $(\Leftarrow)$ Trivijalno.

Lema 3

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Tada $G = \langle S \rangle$ akko svaki element iz G može da se napiše kao konačan proizvod elemenata iz S (Dakle, nisu nam potrebni inverzni elementi elemenata iz S).

Dokaz:

- $(\Leftarrow)$ Trivijalno.
- $(\Rightarrow)$ Neka važi $G = \langle S \rangle$. To znači da se svako $g \in G$ može napisati u obliku $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$, $s_i \in S \cup S^{-1}$. Dakle, treba da pokažemo da se inverz svakog elementa iz S može napisati kao proizvod elemenata iz S. To ćemo pokazati indukcijom.

Za $n = 1$, tj $g = s_1$ imamo sledeće mogućnosti:

- $s_1 \in S$: Ovo je ok.
- $s_1^{-1} \in S$: Prema Lemi 2, $s_1^{-1} = s_1^m$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Dakle, $g = s_1^m$, što smo i hteli.

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje od n. Neka je $g = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. Po induktivnoj hipotezi znamo da se elementi $s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n-1}$ i s_n mogu prikazati kao proizvod elemenata iz S. Sledi da to važi i za g.

$\square$

Lema 4

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Ako važi:

1. svaki element iz S zadovoljava neko svojstvo P,
2. ako $g, h \in G$ zadovoljavaju P, onda $g \cdot h$ zadovoljava P,

tada svaki element iz $\langle S \rangle$ zadovoljava P

Lema 4

Neka je $(G, \cdot)$ konačna grupa i $S \subseteq G$. Ako važi:

1. svaki element iz S zadovoljava neko svojstvo P,
2. ako $g, h \in G$ zadovoljavaju P, onda $g \cdot h$ zadovoljava P,

tada svaki element iz $\langle S \rangle$ zadovoljava P

Dokaz:
Sledi iz Leme 3, indukcijom.

□

Simetrična grupa

Lema 5

Neka je X neprazan skup. Skup svih bijekcija skupa X na samog sebe sa operacijom kompozicije čini grupu.

Simetrična grupa

Lema 5

Neka je X neprazan skup. Skup svih bijekcija skupa X na samog sebe sa operacijom kompozicije čini grupu.

Definicija 5

Grupa iz Leme 5 se naziva **simetrična grupa** skupa X, u oznaci $Sym(X)$. Ako je $X = \{1, 2, ..., n\}$, simetričnu grupu od X označavamo sa S_n.

Možemo primetiti da su elementi grupe S_n sve permutacije skupa $\{1, 2, ..., n\}$. Ove permutacije možemo prikazati na sledeći način: za $\sigma \in S_n$ pišemo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:

$1 \longmapsto 7 \longmapsto 3 \longmapsto 6 \longmapsto 10 \longmapsto 1$

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:

$1 \longmapsto 7 \longmapsto 3 \longmapsto 6 \longmapsto 10 \longmapsto 1$

$2 \longmapsto 5 \longmapsto 8 \longmapsto 2$

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:

$1 \longmapsto 7 \longmapsto 3 \longmapsto 6 \longmapsto 10 \longmapsto 1$

$2 \longmapsto 5 \longmapsto 8 \longmapsto 2$

$4 \longmapsto 4$

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:

$1 \longmapsto 7 \longmapsto 3 \longmapsto 6 \longmapsto 10 \longmapsto 1$

$2 \longmapsto 5 \longmapsto 8 \longmapsto 2$

$4 \longmapsto 4$

$9 \longmapsto 9$

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Uočimo sledeće cikluse:

$1 \longmapsto 7 \longmapsto 3 \longmapsto 6 \longmapsto 10 \longmapsto 1$

$2 \longmapsto 5 \longmapsto 8 \longmapsto 2$

$4 \longmapsto 4$

$9 \longmapsto 9$

Pišemo $\sigma = (1 \quad 7 \quad 3 \quad 6 \quad 10)(2 \quad 5 \quad 8)(4)(9)$.

Definicija 6

Ciklus $(i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_k)$ je element $\tau \in S_n$ definisan na sledeći način:

1. $\tau(i_1) = i_2,\ \tau(i_2) = i_3, \ldots, \tau(i_{k-1}) = i_k,\ \tau(i_k) = i_1,$
2. $\tau(j) = j$, za $j \neq i_r$, $r = 1, \ldots, n$.

k je **dužina** ciklusa (kažemo da je τ k-ciklus), a skup $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ je **nosač** ciklusa, u oznaci suppτ.
Kažemo da su ciklusi σ i τ **disjunktni** ako supp$\sigma \cap$ supp$\tau = \emptyset$. $(*)$

Definicija 6

Ciklus $(i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_k)$ je element $\tau \in S_n$ definisan na sledeći način:

1. $\tau(i_1) = i_2,\ \tau(i_2) = i_3, ..., \tau(i_{k-1}) = i_k,\ \tau(i_k) = i_1,$
2. $\tau(j) = j$, za $j \neq i_r,\ r = 1, ..., n.$

k je **dužina** ciklusa (kažemo da je τ k-ciklus), a skup $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ je **nosač** ciklusa, u oznaci suppτ.
Kažemo da su ciklusi σ i τ **disjunktni** ako supp$\sigma \cap$ supp$\tau = \emptyset$. $(*)$

Lema 6

Disjunktni ciklusi su permutabilni.

Definicija 6

Ciklus $(i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_k)$ je element $\tau \in S_n$ definisan na sledeći način:

1. $\tau(i_1) = i_2,\ \tau(i_2) = i_3, ..., \tau(i_{k-1}) = i_k,\ \tau(i_k) = i_1,$
2. $\tau(j) = j$, za $j \neq i_r,\ r = 1, ..., n.$

k je **dužina** ciklusa (kažemo da je τ k-ciklus), a skup $\{i_1,\ i_2, ..., i_k\}$ je **nosač** ciklusa, u oznaci suppτ.
Kažemo da su ciklusi σ i τ **disjunktni** ako supp$\sigma \cap$ supp$\tau = \emptyset.\ (*)$

Lema 6

Disjunktni ciklusi su permutabilni.

Dokaz:
Neka su $\sigma, \tau \in S_n$ dva disjunktna ciklusa, tj supp$\sigma \cap$ supp$\tau = \emptyset$.

Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Imamo dve mogućnosti:

Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Imamo dve mogućnosti:

- $i \notin \text{supp}\sigma$ i $i \notin \text{supp}\tau$. Tada $\sigma(i) = \tau(i) = i$, pa je $(\sigma\tau)(i) = (\tau\sigma)(i) = i$.

Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Imamo dve mogućnosti:

- $i \notin \text{supp}\sigma$ i $i \notin \text{supp}\tau$. Tada $\sigma(i) = \tau(i) = i$, pa je $(\sigma\tau)(i) = (\tau\sigma)(i) = i$.
- i pripada tačno jednom od nosača σ i τ. Neka je to b.u.o. $\text{supp}\tau$. Tada $\sigma(i) = i$, pa je $(\sigma\tau)(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(i)$. Pošto je $\tau(i) \in \text{supp}\tau$ i važi $(*)$, sledi $\tau(i) \notin \text{supp}\sigma$, odnosno $\sigma(\tau(i)) = (\tau\sigma)(i) = \tau(i)$.

□

Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Imamo dve mogućnosti:

- $i \notin \mathrm{supp}\sigma$ i $i \notin \mathrm{supp}\tau$. Tada $\sigma(i) = \tau(i) = i$, pa je $(\sigma\tau)(i) = (\tau\sigma)(i) = i$.
- i pripada tačno jednom od nosača σ i τ. Neka je to b.u.o. $\mathrm{supp}\tau$. Tada $\sigma(i) = i$, pa je $(\sigma\tau)(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(i)$. Pošto je $\tau(i) \in \mathrm{supp}\tau$ i važi $(*)$, sledi $\tau(i) \notin \mathrm{supp}\sigma$, odnosno $\sigma(\tau(i)) = (\tau\sigma)(i) = \tau(i)$.

$\square$

Svaka permutacija se može napisati kao proizvod, tj. kompozicija disjunktnih ciklusa.
Ciklus dužine 2 se naziva **transpozicija**.

Lema 7

Svaki ciklus je proizvod transpozicija.

Lema 7

Svaki ciklus je proizvod transpozicija.

Dokaz:
Dovoljno je pokazati da je

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad k) = (1 \quad 2)(1 \quad 3) \cdots (1 \quad k),$$

a ovo se lako proverava indukcijom.

$\square$

Lema 7

Svaki ciklus je proizvod transpozicija.

Dokaz:
Dovoljno je pokazati da je

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad k) = (1 \quad 2)(1 \quad 3)\cdots(1 \quad k),$$

a ovo se lako proverava indukcijom.

$\square$

Dakle, sledi da se svaka permutacija može predstaviti kao proizvod transpozicija.

Definicija 7

Neka je data permutacija $\sigma \in S_n$. Kažemo da σ čini **inverziju** s obzirom na elemente $i, j \leqslant n$ akko je $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Definicija 7

Neka je data permutacija $\sigma \in S_n$. Kažemo da σ čini **inverziju** s obzirom na elemente $i, j \leqslant n$ akko je $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Broj svih inverzija permutacije σ obeležavamo sa $\mathrm{I}(\sigma)$. Kažemo da je σ **parna** permutacija ako je $\mathrm{I}(\sigma)$ paran broj, a u suprotnom je **neparna**.

Definicija 7

Neka je data permutacija $\sigma \in S_n$. Kažemo da σ čini **inverziju** s obzirom na elemente $i, j \leqslant n$ akko je $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Broj svih inverzija permutacije σ obeležavamo sa $\mathrm{I}(\sigma)$. Kažemo da je σ **parna** permutacija ako je $\mathrm{I}(\sigma)$ paran broj, a u suprotnom je **neparna**.

Primer:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{I}(\sigma) = 6$$

Lema 8

Permutacije σ i $(i \quad j)\sigma$ su suprotne parnosti.

Lema 8

Permutacije σ i $(i \quad j)\sigma$ su suprotne parnosti.

Dokaz: Neka je $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

Posmatrajmo sledeće slučajeve:

- $j = i + 1$

$$(i \quad i+1)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i+1} & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Vidimo da u tom slučaju važi:

$$\mathrm{I}((i \quad i+1)\sigma) = \begin{cases} \mathrm{I}(\sigma) + 1, & a_i < a_{i+1} \\ \mathrm{I}(\sigma) - 1, & a_i > a_{i+1} \end{cases}$$

- $j > i + 1$
  Lako se može pokazati da je

  $$(i \quad j) = (i \quad i+1)(i+1 \quad i+2)\ldots$$
  $$(j-2 \quad j-1)(j-1 \quad j)(j-1 \quad j-2)\ldots(i+2 \quad i+1)(i+1 \quad i),$$

  pa je $(i \quad j)\sigma$ sukcesivno množenje $2(j-i)-1$ transpozicija tipa $(k \quad k+1)$. Iz prvog slučaja vidimo da se menja parnost σ kada se pomnoži transpozicijom.

$\square$

Posledica

Permutacija je parna akko je proizvod parnog proja transpozicija.

Posledica

Permutacija je parna akko je proizvod parnog proja transpozicija.

Napomena:
Jedna permutacija se može na bezbroj načina predstaviti kao proizvod transpozicija, ali parnost uvek ostaje ista! Na primer,

$$\sigma = (1 \quad 3)(1 \quad 5)(1 \quad 2)(1 \quad 4) =$$

$$= (2 \quad 3)(1 \quad 2)(2 \quad 3)(1 \quad 5)(1 \quad 2)(1 \quad 4)$$

.

Lema 9

Parnih permutacija u grupi S_n ima jednako kao i neparnih.

Lema 9

Parnih permutacija u grupi S_n ima jednako kao i neparnih.

Dokaz:
Neka je A_n skup svih parnih permutacija u S_n (ovo je zapravo podgrupa od S_n i naziva se **alternirajuća podgrupa** od S_n).
Definišimo funkciju f na S_n sa $\text{f}(\sigma) = (1 \quad 2)\sigma$. Tvrdimo da je f bijekcija skupa A_n u skup svih neparnih permutacija.
Zbog Leme 8 znamo da f slika parne permutacije u neparne.
Neka je $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Tada postoji neko $i \in \{1, ..., n\}$ takvo da $\sigma_1(i) \neq \sigma_2(i)$. Tada je i $(1 \quad 2)\sigma_1(i) \neq (1 \quad 2)\sigma_2(i)$, pa sledi da je f 1-1.
Za neko neparno preslikavanje θ, $(2 \quad 1)\theta$ je parno preslikavanje i važi $(1 \quad 2)(2 \quad 1)\theta = \theta$. Dakle, f je na.
Ovime je dokaz završen.

$\square$

RUBIKOVA KOCKA

Oznake

Za početak navedimo neke oznake vezane za Rubikovu kocku:

Oznake

Za početak navedimo neke oznake vezane za Rubikovu kocku:

- Sastoji se od 26 **kockica**. Od toga imamo:
  - 8 **ugaonih** kockica (3 vidljive strane),
  - 12 **ivičnih** kockica (2 vidljive strane),
  - 6 **centralnih** kockica (1 vidljiva strana).

Oznake

Za početak navedimo neke oznake vezane za Rubikovu kocku:

- Sastoji se od 26 **kockica**. Od toga imamo:
  - 8 **ugaonih** kockica (3 vidljive strane),
  - 12 **ivičnih** kockica (2 vidljive strane),
  - 6 **centralnih** kockica (1 vidljiva strana).
- Ima 6 strana, kojima ćemo dodeliti imena u odnosu na njihovu lokaciju: r (rigt), l (left), u (up), d (down), f (front), b(back).

Oznake

Za početak navedimo neke oznake vezane za Rubikovu kocku:

- Sastoji se od 26 **kockica**. Od toga imamo:
  - 8 **ugaonih** kockica (3 vidljive strane),
  - 12 **ivičnih** kockica (2 vidljive strane),
  - 6 **centralnih** kockica (1 vidljiva strana).
- Ima 6 strana, kojima ćemo dodeliti imena u odnosu na njihovu lokaciju: r (rigt), l (left), u (up), d (down), f (front), b(back).
- Za imenovanje ugaonih kockica koristimo njihovu lokaciju. Npr, kockica koja se nalazi u gornjem, desnom, prednjem uglu se naziva urf (ili rfu ili fur). Slično imenujemo i ivične i centralne kockice.

- **Kućice** su prazna mesta na kojima se nalaze kockice. Označavaju se isto.

- **Kućice** su prazna mesta na kojima se nalaze kockice. Označavaju se isto.
- **Osnovni potezi** su okretanja jedne strane rubikove kocke za 90° u smeru kazaljke na satu. Ima ih 6, i zovu se po imenima stranica koje okreću: R, L, U, D, F, B.

- **Kućice** su prazna mesta na kojima se nalaze kockice. Označavaju se isto.
- **Osnovni potezi** su okretanja jedne strane rubikove kocke za 90° u smeru kazaljke na satu. Ima ih 6, i zovu se po imenima stranica koje okreću: R, L, U, D, F, B.
- **Potez** je (konačno) sukcesivno primenjivanje osnovnih poteza. Ako dva puta primenjujemo isti osnovni potez, na primer B, pisaćemo B2. Ako ga primenjujemo tri puta, pisaćemo B'.

- **Kućice** su prazna mesta na kojima se nalaze kockice. Označavaju se isto.
- **Osnovni potezi** su okretanja jedne strane rubikove kocke za 90° u smeru kazaljke na satu. Ima ih 6, i zovu se po imenima stranica koje okreću: R, L, U, D, F, B.
- **Potez** je (konačno) sukcesivno primenjivanje osnovnih poteza. Ako dva puta primenjujemo isti osnovni potez, na primer B, pisaćemo B2. Ako ga primenjujemo tri puta, pisaćemo B'.
- **Konfiguracija** je neka permutacija kockica. Primetimo da ugaone mogu da permutuju samo sa drugim ugaonim kockicama, a ivične samo sa ivičnim. Konfiguraciju u kojoj su sve kockice u odgovarajućim kućicama sa odgovarajućim orijentacijama zovemo **početna koniguracija**. Smatramo da su dva poteza jednaka ako dovode do iste konfiguracije.

Grupa Rubikove kocke

Grupu Rubikove kocke, u oznaci $(G, \cdot)$, čine skup svih različitih poteza nad njom G i operacija $\cdot$ koju definišemo na sledeći način: ako su M_1 i M_2 neki potezi, onda je $M_1 \cdot M_2$ potez pri kojem se prvo odradi M_1, pa zatim M_2.

Grupa Rubikove kocke

Grupu Rubikove kocke, u oznaci $(G, \cdot)$, čine skup svih različitih poteza nad njom G i operacija $\cdot$ koju definišemo na sledeći način: ako su M_1 i M_2 neki potezi, onda je $M_1 \cdot M_2$ potez pri kojem se prvo odradi M_1, pa zatim M_2.

Teorema 1

Skup G sa gore definisanom operacijom $\cdot$ čini grupu.

Grupa Rubikove kocke

Grupu Rubikove kocke, u oznaci $(G, \cdot)$, čine skup svih različitih poteza nad njom G i operacija $\cdot$ koju definišemo na sledeći način: ako su M_1 i M_2 neki potezi, onda je $M_1 \cdot M_2$ potez pri kojem se prvo odradi M_1, pa zatim M_2.

Teorema 1

Skup G sa gore definisanom operacijom $\cdot$ čini grupu.

Dokaz: Dobra definisanost i asocijativnost su očigledni. Neutralni element je prazan potez, dakle potez u kojem ne radimo ništa. Za potez M inverzni potez M^{-1} je onaj gde ponovimo sve pojedinačne osnovne poteze obrnutim redosledom u suprotnom smeru.

$\square$

Grupa Rubikove kocke

Grupu Rubikove kocke, u oznaci $(G, \cdot)$, čine skup svih različitih poteza nad njom G i operacija $\cdot$ koju definišemo na sledeći način: ako su M_1 i M_2 neki potezi, onda je $M_1 \cdot M_2$ potez pri kojem se prvo odradi M_1, pa zatim M_2.

Teorema 1

Skup G sa gore definisanom operacijom $\cdot$ čini grupu.

Dokaz: Dobra definisanost i asocijativnost su očigledni. Neutralni element je prazan potez, dakle potez u kojem ne radimo ništa. Za potez M inverzni potez M^{-1} je onaj gde ponovimo sve pojedinačne osnovne poteze obrnutim redosledom u suprotnom smeru. $\square$

Na osnovu definicije, vidimo da je $G = \langle R, L, U, D, F, B \rangle$.

Konfiguracije

Svaka konfiguracija Rubikove kocke je određena sledećim podacima:

Konfiguracije

Svaka konfiguracija Rubikove kocke je određena sledećim podacima:

- pozicijama ugaonih kockica,
- pozicijama ivičnih kockica,
- orijentacijama ugaonih kockica,
- orijentacijama ivičnih kockica.

Konfiguracije

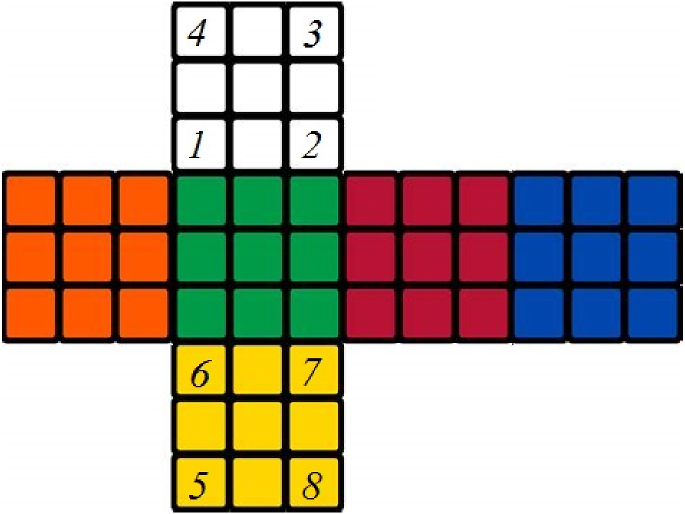
Svaka konfiguracija Rubikove kocke je određena sledećim podacima:

- pozicijama ugaonih kockica,
- pozicijama ivičnih kockica,
- orijentacijama ugaonih kockica,
- orijentacijama ivičnih kockica.

Prva stavka se može opisati kao elemenat $\sigma \in S_8$, tj npermutacija koja "seli" ugaone kockice neke ugaone kućice. Slično važi i za drugu stavku, samo je u pitanju premutacija $\tau \in S_{12}$.

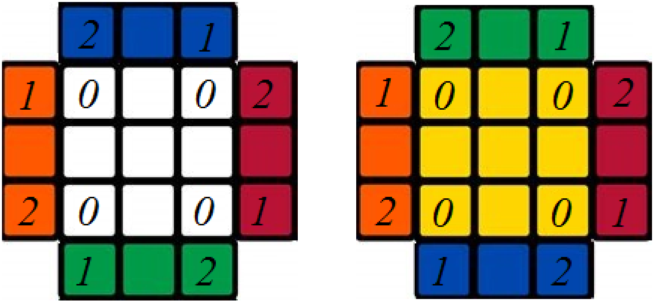
Da bismo opisali poslednje dve stavke uvešćemo još neke notacije. Svaka ugaona kockica ima tri stranice, koje ćemo nazvati 0, 1 i 2 na sledeći način: za početak numerišimo po jednu stranu svake kućice brojevima od 1-8 tako da je

- 1 na u strani kockice ufl,
- 2 na u strani kockice urf,
- 3 na u strani kockice ubr,
- 4 na u strani kockice ulb,
- 5 na d strani kockice dbl,
- 6 na d strani kockice dlf,
- 7 na d strani kockice dfr,
- 8 na d strani kockice drb


4
3
1
2
6
7
5
8

Na strane kockica gde su brojevi kućica pišemo 0, a 1 i 2 pišemo a preostale dve u smeru kazaljke na satu.

Na strane kockica gde su brojevi kućica pišemo 0, a 1 i 2 pišemo a preostale dve u smeru kazaljke na satu.



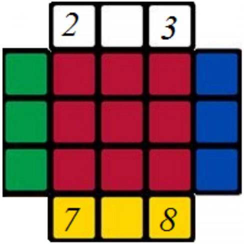
Na ovaj način smo numerisali sve strane svih ugaonih kockica. Ako je kocka u određenoj koniguraciji, orijentacije ugaonih kockica opisujemo na sledeći način: za $i = 1, \ldots, 8$ nađemo kućicu označenu sa i. Neka je x_i broj broj sa one strane kockice koja se poklapa sa numerisanom stranom kućice. Sada definišemo x kao uređenu osmorku $(x_1, \ldots, x_8)$. Primetimo da možemo gledati na x_i kao na broj obrta (u smeru kazaljke na satu) za koje strana kockice označena sa 0 udaljena od označene strane kućice. Kockica koja je 3 obrtaja udaljena je isto orijentisana kao i ona koja je udaljena 0 obrtaja, pa na x_i-jeve možemo gledati kao na elemente grupe $\mathbb{Z}_3$, a $x \in \mathbb{Z}_3^8$

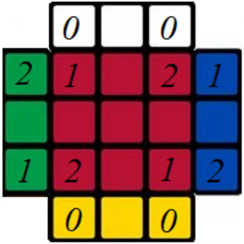
Primeri:

- U početnoj konfiguraciji je $x = (0,0,0,0,0,0,0,0)$, pisaćemo još i $x = 0$

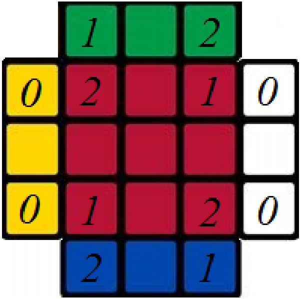
Primeri:

- U početnoj konfiguraciji je $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, pisaćemo još i $x = 0$
- Pogledajmo šta će se desiti sa orijentacijama kad uradimo potez R. Kućice i kockice na početku izgledaju ovako:





Kada primenimo potez R, desna strana kocke izgleda ovako (leva je isto kao na početku):

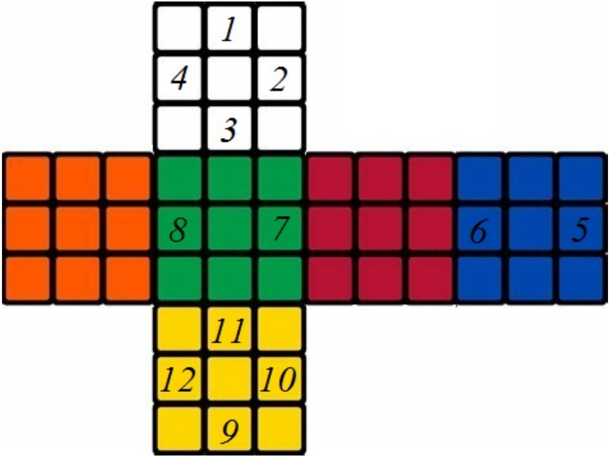


Kockice na strani l nisu pomerene ovim potezom, pa je $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, a vidimo da je $x_2 = 1, x_3 = 2, x_7 = 2$ i $x_8 = 1$. Prema tome, $x = (0, 1, 2, 0, 0, 0, 2, 1)$.

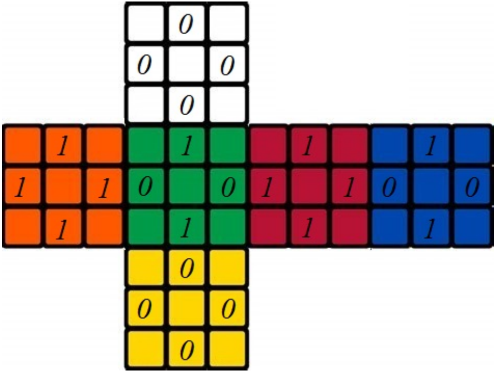
Sada sve analogno radimo za ivične kockice. Prvo, označimo ivične kućice na sledeći način.

Sada sve analogno radimo za ivične kockice. Prvo, označimo ivične kućice na sledeći način. Pišemo:

- 1 na u stranu ub kućice
- 2 na u stranu ur kućice
- 3 na u stranu uf kućice
- 4 na u stranu ul kućice
- 5 na b stranu lb kućice
- 6 na b stranu rb kućice
- 7 na f stranu rf kućice
- 8 na f stranu lf kućice
- 9 na d stranu db kućice
- 10 na d stranu dr kućice
- 11 na d stranu df kućice
- 12 na d stranu dl kućice


1
4
2
3
8
7
6
5
11
12
10
9

Što se samih kockica tiče, u pišemo 0 na strani gde je kućica numerisana, a 1 na preostaloj strani. Kao sa ugaonim kockicama, definišemo y_i kao onaj broj na kockici koja se nalazi u kućici i na numerisanoj strani. Na taj način dobijamo $y \in \mathbb{Z}_2^{12}$.



Dakle, bilo koja konfiguracija Rubikove kocke se može opisati sa $\sigma \in S_8$, $\tau \in S_{12}$, $x \in \mathbb{Z}_3^8$ i $y \in \mathbb{Z}_2^{12}$. Označavaćemo konfiguracije kao uređene četvorke (σ, τ, x, y).

Primeri:

- Početna konfiguracija je (id,id,0,0)

Dakle, bilo koja konfiguracija Rubikove kocke se može opisati sa $\sigma \in S_8$, $\tau \in S_{12}$, $x \in \mathbb{Z}_3^8$ i $y \in \mathbb{Z}_2^{12}$. Označavaćemo konfiguracije kao uređene četvorke (σ, τ, x, y).

Primeri:

- Početna konfiguracija je (id,id,0,0)
- Odredimo konfiguraciju kocke nakon odrađenog poteza D R D^{-1} R^{-1} (ovo se kraće piše [D,R], i naziva se **komutator** elemenata D i R).

Dakle, bilo koja konfiguracija Rubikove kocke se može opisati sa $\sigma \in S_8$, $\tau \in S_{12}$, $x \in \mathbb{Z}_3^8$ i $y \in \mathbb{Z}_2^{12}$. Označavaćemo konfiguracije kao uređene četvorke (σ, τ, x, y).
Primeri:

- Početna konfiguracija je (id,id,0,0)
- Odredimo konfiguraciju kocke nakon odrađenog poteza D R D^{-1} R^{-1} (ovo se kraće piše [D,R], i naziva se **komutator** elemenata D i R).
  σ posmatramo kao bijekciju skupa 8 ugaonih kockica na skup 8 ugaonih kućica. Vidimo da [D,R] menja pozicije dfl i dfr kockica, kao i rbu i rbd, kockica. Dakle,

$$\sigma = (dfl \quad dfr)(rbu \quad rbd)$$

Slično, τ je bijekcija skupa 12 ivični kockica na 12 ivičnih kućica. Vidimo da [D,R] pomera df na dr, dr na rb i rb na df. Dakle,

$$\tau = (df \quad dr \quad rb)$$

.

Slično, τ je bijekcija skupa 12 ivični kockica na 12 ivičnih kućica. Vidimo da [D,R] pomera df na dr, dr na rb i rb na df. Dakle,

$$\tau = (df \quad dr \quad rb)$$

.

Analizom kocke zaključujemo da je $x = (0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2)$ i $y = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Ovime smo dobili traženu konfiguraciju.

Koliko ima konfiguracija?

Koliko ima konfiguracija?

$$\begin{aligned} 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} &= 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 \\ &\approx 5,19 \cdot 10^{20} \end{aligned}$$

Koliko ima konfiguracija?

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000$$
$$\approx 5,19 \cdot 10^{20}$$

Definicija 8

Konfiguracija je **validna** ako se može do nje doći nekim potezom iz G. U suprotnom kažemo da nije validna.

Koliko ima konfiguracija?

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000$$
$$\approx 5,19 \cdot 10^{20}$$

Definicija 8

Konfiguracija je **validna** ako se može do nje doći nekim potezom iz G. U suprotnom kažemo da nije validna.

Koliko ima validnih konfiguracija?

Koliko ima konfiguracija?

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000$$
$$\approx 5,19 \cdot 10^{20}$$

Definicija 8

Konfiguracija je **validna** ako se može do nje doći nekim potezom iz G. U suprotnom kažemo da nije validna.

Koliko ima validnih konfiguracija?
Kako da ih prepoznamo?

Teorema 2

Konfiguracija je validna akko važi:

- σ i τ su iste parnosti
- $\sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0\,(mod 3)$
- $\sum_{i=1}^{12} y_i \equiv 0\,(mod 2)$

Zbog Teoreme 2 i Leme 9 sledi da bar pola mogućih konfiguracija kocke nije validno! Ovo možemo interpretirati na sledeći način: ako zamenimo mesta od dve ugaone kockice ili dve ivične kockice, kocka je nerešiva.

Od svih mogućih uređenih osmorki $(x_1, ..., x_8) \in \mathbb{Z}_3^8$, trećina je takva da $\sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0\,(mod 3)$. Dakle, samo trećina preostalih konfiguracija je validna!

Ovo nam govori da ako izvadimo jednu ugaonu kockicu i vratimo je u drugačijoj orijentaciji nego što je bila pre, kocka je nerešiva.

Od svih mogućih uređenih osmorki $(x_1, ..., x_8) \in \mathbb{Z}_3^8$, trećina je takva da $\sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0\,(mod 3)$. Dakle, samo trećina preostalih konfiguracija je validna!
Ovo nam govori da ako izvadimo jednu ugaonu kockicu i vratimo je u drugačijoj orijentaciji nego što je bila pre, kocka je nerešiva.

Takođe, od svih uređenih osmorki $(y_1, ..., y_{12}) \in \mathbb{Z}_2^{12}$, samo polovina je takva da je $\sum_{i=1}^{12} y_i \equiv 0\,(mod 2)$ Ovo nam govori da ako izvadimo jednu ivič kockicu i vratimo je u drugačijoj orijentaciji nego što je bila pre, kocka je nerešiva.

Konačan broj valindnih konfiguracija:

$$\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 4\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

$$\approx 4,25 \cdot 10^{19}$$

.

Hvala na pažnji!