Геделове теореме о непотпуности

Младен Зекић

Љетњи семинар математике
Истраживачка станица Петница

29. јул 2018.

Пеанова аритметика P

Језик Пеанове аритметике се састоји од

- пребројиво много индивидуалних промјенљивих $x_0, x_1, \ldots$
- индивидуалне константе $\mathbf{0}$
- функцијске константе следбеника $'$
- операцијских константи $+, \cdot$
- логичких константи $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists, =$
- лијеве и десне заграде $(,)$

Помоћу константе $\mathbf{0}$ и функције $'$ можемо дефинисати *нумерале*: $\mathbf{1} =_{df} \mathbf{0}'$, $\mathbf{2} =_{df} \mathbf{0}''$, $\mathbf{3} =_{df} \mathbf{0}'''$, $\ldots$

Аксиоме и правила исказног рачуна

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$
3. $(\theta \to \varphi) \to ((\theta \to \psi) \to (\theta \to (\varphi \wedge \psi)))$
4. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
5. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
8. $(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta))$
9. $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$
10. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
11. $\neg\neg\varphi \to \varphi$
12. $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$

13. $\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$
14. $\varphi(t) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$
15. $\dfrac{\psi \rightarrow \varphi(x)}{\psi \rightarrow \forall x\, \varphi(x)}$
16. $\dfrac{\varphi(x) \rightarrow \psi}{\exists x\, \varphi(x) \rightarrow \psi}$

Напомена: Правила извођења 15 и 16 важе под условом да се x не јавља слободно у доњој формули.

Аксиоме једнакости

17. $x = x$
18. $y = z \to (\varphi(y) \to (\varphi(z))$

Аритметичке аксиоме

19. $\neg x' = 0$
20. $x' = y' \to x = y$
21. $x + 0 = x$
22. $(x + y') = (x + y)'$
23. $x \cdot 0 = 0$
24. $(x \cdot y') = x \cdot y + x$
25. $\forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x')) \to (\varphi(0) \to (\varphi(t))$

Двије важне дефиниције

Дефиниција

Нека је $\mathcal{T}$ теорија на језику $\mathcal{L}$. Кажемо да је теорија $\mathcal{T}$ *потпуна* или *комплетна* ако за сваку реченицу A на језику $\mathcal{L}$ важи да је $\mathcal{T} \vdash A$ или $\mathcal{T} \vdash \neg A$.

Двије важне дефиниције

Дефиниција

Нека је $\mathcal{T}$ теорија на језику $\mathcal{L}$. Кажемо да је теорија $\mathcal{T}$ *потпуна* или *комплетна* ако за сваку реченицу A на језику $\mathcal{L}$ важи да је $\mathcal{T} \vdash A$ или $\mathcal{T} \vdash \neg A$.

Дефиниција

Скуп формула Γ је *неконзистентан* или *противрјечан* ако важи $\Gamma \vdash \bot$. У супротном, кажемо да је скуп Γ *конзистентан* или *непротиврјечан*.

Кодирање у природним бројевима

Дефиниција

Кодирање неког скупа A је инјективно пресликавање $\kappa : A \to \mathbb{N}$. Пресликавање κ се назива *кодирајућом функцијом*, а број $\kappa(a)$ се назива кôдом елемента $a \in A$ и обиљежава се са $\ulcorner a \urcorner$.

Кодирање у природним бројевима

Теорема (Основна теорема аритметике)

Ако је n природан број, онда постоје јединствени прости бројеви $p_1 < \ldots < p_k$, и јединствени природни бројеви $m_1, \ldots, m_k$ већи од нуле, тако да важи

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}.$$

0	$'$	$+$	$\cdot$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$=$	$($	$)$	x_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$20+i$

Примјер.

Ако је φ формула $\forall x_0 \, \exists x_1 \, ((x_0 + x_1') = x_2)$, онда је $\ulcorner \varphi \urcorner = 2^9 \cdot 3^{20} \cdot 5^{10} \cdot 7^{21} \cdot 11^{12} \cdots 41^{22} \cdot 43^{13}$.

Дефиниција

Кажемо да је релација $R(x, y)$ за $x, y \in \mathbb{N}$ *представљива* у теорији T ако постоји формула $\varphi(x, y)$ (на језику теорије T) таква да за све $a, b \in \mathbb{N}$ важи

$$R(a, b) \text{ ако и само ако } \vdash \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Кодирање у формалној аритметици

Дефиниција

Кажемо да је релација $R(x,y)$ за $x,y\in\mathbb{N}$ *представљива* у теорији T ако постоји формула $\varphi(x,y)$ (на језику теорије T) таква да за све $a,b\in\mathbb{N}$ важи

$$R(a,b) \text{ ако и само ако } \vdash \varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Може се доказати да су све релације потребне за кодирање формула језика Пеанове аритметике представљиве у Пеановој аритметици.

Кодирање у формалној аритметици

Дефиниција

Кажемо да је релација $R(x, y)$ за $x, y \in \mathbb{N}$ *представљива* у теорији T ако постоји формула $\varphi(x, y)$ (на језику теорије T) таква да за све $a, b \in \mathbb{N}$ важи

$$R(a, b) \text{ ако и само ако } \vdash \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Може се доказати да су све релације потребне за кодирање формула језика Пеанове аритметике представљиве у Пеановој аритметици.

На тај начин смо омогућили формалној аритметици да „говори о самој себи”.

Помоћне релације

Нека је $R(x,y)$ релација дефинисана на природним бројевима, таква да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ је kôд доказа у Пеановој аритметици за формулу чији је kôд } x$$

Помоћне релације

Нека је $R(x, y)$ релација дефинисана на природним бројевима, таква да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y \text{ је кôд доказа у Пеановој аритметици} \\ \text{за формулу чији је кôд } x \end{array}$$

Може се доказати да је релација $R(x, y)$ представљива у Пеановој аритметици.

Помоћне релације

Нека је $R(x, y)$ релација дефинисана на природним бројевима, таква да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$R(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ је кôд доказа у Пеановој аритметици за формулу чији је кôд } x$$

Може се доказати да је релација $R(x, y)$ представљива у Пеановој аритметици.

То значи да постоји формула $\mathrm{Prov}(x, y)$ која у P представља релацију $R(x, y)$. Дакле, у Пеановој аритметици можемо дефинисати предикат

$$\mathrm{Pr}(x) = \exists y\, \mathrm{Prov}(x, y).$$

Помоћне релације

Нека је $R(x,y)$ релација дефинисана на природним бројевима, таква да за све $x,y\in\mathbb{N}$ важи

$$R(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ је кôд доказа у Пеановој аритметици за формулу чији је кôд } x$$

Може се доказати да је релација $R(x,y)$ представљива у Пеановој аритметици.

То значи да постоји формула $\mathrm{Prov}(x,y)$ која у P представља релацију $R(x,y)$. Дакле, у Пеановој аритметици можемо дефинисати предикат

$$\mathrm{Pr}(x) = \exists y\, \mathrm{Prov}(x,y).$$

$\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ можемо интерпретирати као „φ је доказиво у P".

Особине предиката $\mathrm{Pr}(x)$

Лема

Предикат $\mathrm{Pr}(x)$ *задовољава сљедеће услове:*

P1. $\vdash \varphi$ *имплицира* $\vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$;

P2. $\vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$;

P3. $\vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \psi \urcorner))$.

Слично, у P се може дефинисати функција $\mathrm{sub}(x, y)$ таква да важи

$$\vdash \mathrm{sub}(\ulcorner \varphi(x) \urcorner, \mathbf{n}) = \ulcorner \varphi(\mathbf{n}) \urcorner.$$

Дијагонална функција и њене особине

Слично, у P се може дефинисати функција $\mathrm{sub}(x, y)$ таква да важи

$$\vdash \mathrm{sub}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \mathbf{n}) = \ulcorner\varphi(\mathbf{n})\urcorner.$$

Функцију $d(x) = \mathrm{sub}(x, x)$ називаћемо *дијагоналном функцијом.* Из њене дефиниције слиједи да за сваку формулу са једном слободном промјенљивом важи

$$d(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner.$$

Дијагонална функција и њене особине

Слично, у P се може дефинисати функција $\mathrm{sub}(x, y)$ таква да важи

$$\vdash \mathrm{sub}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \mathbf{n}) = \ulcorner\varphi(\mathbf{n})\urcorner.$$

Функцију $d(x) = \mathrm{sub}(x, x)$ називаћемо *дијагоналном функцијом.* Из њене дефиниције слиједи да за сваку формулу са једном слободном промјенљивом важи

$$d(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner.$$

За сваку формулу ψ на језику Пеанове аритметике, формулу $\psi(d(x))$ називамо *дијагонализацијом формуле* $\psi(x)$.

Лема

Нека $\psi(x)$ *има само промјенљиву* x *слободну. Тада постоји формула* φ *без слободних промјенљивих тако да је* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Доказ. Нека је $\theta(x)$ дијагонализација формуле $\psi(x)$, то јест, $\theta(x) = \psi(d(x))$. Узмимо да је $\varphi = \theta(\ulcorner \theta(x) \urcorner)$ и докажимо да овако дефинисано φ задовољава услове леме. Имамо

$$
\begin{aligned}
\vdash &\quad \varphi \leftrightarrow \psi(d(\ulcorner \theta(x) \urcorner)) \\
\vdash &\quad \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \theta(\ulcorner \theta(x) \urcorner) \urcorner) \\
\vdash &\quad \varphi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner).
\end{aligned}
$$

□

Прва теорема о непотпуности

Теорема (Гедел, 1931)

Нека је T *неки формални систем који садржи* P *и нека је* $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. *Онда ако је* T *конзистентно,*

(i) $\nvdash \varphi$,

(ii) *ако* $\vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ *имплицира* $\vdash \varphi$, *онда* $\nvdash \neg\varphi$.

Доказ. Примијенили смо лему о дијагонализазији узимајући за $\psi(x)$ формулу $\neg\mathrm{Pr}(x)$.

(i) Имамо

$$\begin{array}{rcll} \vdash \varphi & \Rightarrow & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) & \quad (\mathrm{P1}) \\ \vdash \varphi & \Rightarrow & \neg\varphi & \end{array}$$

Међутим, пошто је T конзистентан систем, слиједи да се у њему не може доказати φ.

(ii) Важи

$$\vdash \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$
$$\vdash \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi$$

Поново због конзистентности формалног система T слиједи $\nvdash \neg\varphi$. $\square$

(ii) Важи

$$\vdash \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$
$$\vdash \neg\varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash \varphi$$

Поново због конзистентности формалног система T слиједи $\nvdash \neg\varphi$. $\square$

Дакле, прва Геделова теорема о непотпуности каже да у сваком формалном систему који садржи аритметику постоји тврђење које се не може ни доказати ни оповргнути у том систему.

Теорема (Гедел, 1931)

Нека је T неки формални систем који садржи P и нека је $\mathrm{Con}(T)$ формула $\neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Онда ако је T конзистентно, $\nvdash \mathrm{Con}(T)$.

Доказ. Нека је φ реченица таква да је $\varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ (дакле, иста као и у првој теореми о непотпуности.) Доказаћемо да је $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$. Имамо:

$$\vdash \quad (0 = 1) \to \varphi$$

Друга теорема о непотпуности

Теорема (Гедел, 1931)

Нека је T *неки формални систем који садржи* P *и нека је* $\mathrm{Con}(T)$ *формула* $\neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. *Онда ако је* T *конзистентно,* $\nvdash \mathrm{Con}(T)$.

Доказ. Нека је φ реченица таква да је $\varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ (дакле, иста као и у првој теореми о непотпуности.) Доказаћемо да је $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$. Имамо:

$$\vdash \quad (0 = 1) \to \varphi$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \qquad \text{(P1 и P3)}$$

Теорема (Гедел, 1931)

Нека је T неки формални систем који садржи P и нека је $\mathrm{Con}(T)$ формула $\neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Онда ако је T конзистентно, $\nvdash \mathrm{Con}(T)$.

Доказ. Нека је φ реченица таква да је $\varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ (дакле, иста као и у првој теореми о непотпуности.) Доказаћемо да је $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$. Имамо:

$$
\begin{array}{lll}
\vdash & (0 = 1) \to \varphi & \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) & \text{(P1 и P3)} \\
\vdash & \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) &
\end{array}
$$

Теорема (Гедел, 1931)

Нека је T неки формални систем који садржи P и нека је $\mathrm{Con}(T)$ формула $\neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Онда ако је T конзистентно, $\nvdash \mathrm{Con}(T)$.

Доказ. Нека је φ реченица таква да је $\varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ (дакле, иста као и у првој теореми о непотпуности.) Доказаћемо да је $\vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$. Имамо:

$$\begin{array}{lll}
\vdash & (0 = 1) \to \varphi & \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) & \text{(P1 и P3)} \\
\vdash & \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner) & \\
\vdash & \varphi \to \mathrm{Con}(T) & (\varphi \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner))
\end{array}$$

Докажимо и други смјер:

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \quad \text{(P2)}$$

Докажимо и други смјер:

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \quad \text{(P2)}$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \qquad \text{(P1, P3 и } \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \neg\varphi)$$

Докажимо и други смјер:

$$\begin{array}{lll}\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) & \text{(P2)} \\ \vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\varphi) \\ \vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\wedge\neg\varphi\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to (\varphi\wedge\neg\varphi)) \end{array}$$

Докажимо и други смјер:

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \quad \text{(P2)}$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \quad \text{(P1, P3 и } \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\varphi\text{)}$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\wedge\neg\varphi\urcorner) \quad \text{(P1, P3 и } \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to (\varphi\wedge\neg\varphi))\text{)}$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner 0=1\urcorner) \quad \text{(P1, P3 и } \vdash (\varphi\wedge\neg)\varphi \to (0=1)\text{)}$$

Докажимо и други смјер:

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \quad \text{(P2)}$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \quad \text{(P1, P3 и } \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\varphi\text{)}$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi \wedge \neg\varphi\urcorner) \quad \text{(P1, P3 и } \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to (\varphi \wedge \neg\varphi))$$

$$\vdash \quad \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \quad \text{(P1, P3 и } \vdash (\varphi \wedge \neg)\varphi \to (0 = 1))$$

$$\vdash \quad \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

Докажимо и други смјер:

$$
\begin{array}{lll}
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) & \text{(P2)} \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \neg\varphi) \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi \wedge \neg\varphi\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)) \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \vdash (\varphi \wedge \neg)\varphi \rightarrow (0 = 1)) \\
\vdash & \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \rightarrow \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) & \\
\vdash & \mathrm{Con}(T) \rightarrow \varphi &
\end{array}
$$

Докажимо и други смјер:

$$
\begin{array}{lll}
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) & \text{(P2)} \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg\varphi) \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\wedge\neg\varphi\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \vdash \varphi \to (\neg\varphi \to (\varphi\wedge\neg\varphi)) \\
\vdash & \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) & \text{(P1, P3 и } \vdash (\varphi\wedge\neg)\varphi \to (0 = 1)) \\
\vdash & \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \to \neg\mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) & \\
\vdash & \mathrm{Con}(T) \to \varphi &
\end{array}
$$

Сада из прве теореме о непотпуности слиједи да се реченица $\mathrm{Con}(T)$ не може доказати у T. $\square$

Друга теорема непотпуности односи се на све конзистентне теорије у којима се може интерпретирати аритметика. Пошто се у ZFC може интерпретирати аритметика, онда ако је ZFC конзистентна, њена конзистентност се не може доказати средствима расположивим у ZFC.

Друга теорема непотпуности односи се на све конзистентне теорије у којима се може интерпретирати аритметика. Пошто се у ZFC може интерпретирати аритметика, онда ако је ZFC конзистентна, њена конзистентност се не може доказати средствима расположивим у ZFC.

Пошто се цјелокупна математика може засновати на ZFC, друга Геделова теорема о непотпуности се може изразити и на сљедећи начин:

Друга теорема непотпуности односи се на све конзистентне теорије у којима се може интерпретирати аритметика. Пошто се у ZFC може интерпретирати аритметика, онда ако је ZFC конзистентна, њена конзистентност се не може доказати средствима расположивим у ZFC.

Пошто се цјелокупна математика може засновати на ZFC, друга Геделова теорема о непотпуности се може изразити и на сљедећи начин:

Ако је математика уопште конзистентна, њена конзистентност не може се доказати математичким средствима.