IS Petnica, seminar MATEMATIKE
Zimski MAT2, 2018
Predavanje
Marko Đikić, Prirodno-matematički fakultet u Nišu

Matrice u orahovoj ljusci

1 Prvi deo: O množenju matrica

1. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Izračunati proizvode AB i BA.

2. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati AB i BA.

3. Neka je $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Kolona $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ pomnožena je matricom A i dobijena je kolona $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Kakva je veza između ove dve kolone?

4. Neka su A, B i C tri matrice. Dokazati: proizvod $(AB)C$ ima smisla ako i samo ako proizvod $A(BC)$ ima smisla i u tom slučaju oni su jednaki. Zaključak: množenje matrica je asocijativno, pa ćemo zato pisati samo ABC.

5. Neka matrica A ima n kolona: $A = [\ K_1 \mid K_2 \mid ... \mid K_n\ ]$. Dokazati da je:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 K_1 + x_2 K_2 + ... + x_n K_n.$$

Prema tome, matrica A „kodira“ jednu „transformaciju“ koja elemente skupa $\mathbb{R}^{(\text{broj kolona od } A)}$ pretvara u elemente skupa $\mathbb{R}^{(\text{broj vrsta od } A)}$. Obrnuto, ako znamo transformaciju $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i znamo da se ona može kodirati nekom matricom, kako rekonstruisati tu matricu? Za trenutak ćemo ovakve transformacije nazivati **matričnim**.

6. Transformaciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zovemo **linearna transformacija** ako za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi: $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$. Dokazati da je transformacija f matrična ako i samo ako je linearna.

7. Ako su $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $b : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ dve linearne transformacije, kojima odgovaraju matrice A i B, redom, dokazati da je $a \circ b = a(b(\cdot))$ takođe matrična transformacija, i da njoj odgovara matrica AB.

8. Dati (nekakvu) reformulaciju problema sistema linearnih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Zanimljivi zadaci sa matricama

9. Neka su A i B matrice sa realnim elementima dimenzija, redom, 4×2 i 2×4. Izračunati BA ako je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Da li postoji matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je $A^3 = A + I_n$, pri čemu je I_n jedinična matrica.

11. Neka su $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice za koje važi $AB + A + B = \boldsymbol{O}$. Dokazati da A i B komutiraju.

12. Da li postoje matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $AB - BA = I_n$?

2 Drugi deo: vektorski prostori

... nastavak sledi na prolećnom seminaru.