XVI konferencija polaznika Istraživačke stanice Petnica "Korak u nauku"

# Probabilistički metod i zero-sum Ramsey brojevi

[1]Eva Siladi, [2]Branislav Šobot
[1] e.siladji@gmail.com, [2] banesobot@gmail.com
*Gimnazija "Jovan Jovanović Zmaj", Novi Sad*
mentor: Nemanja Draganić

## Šta je Probabilistički metod?

**Cilj**

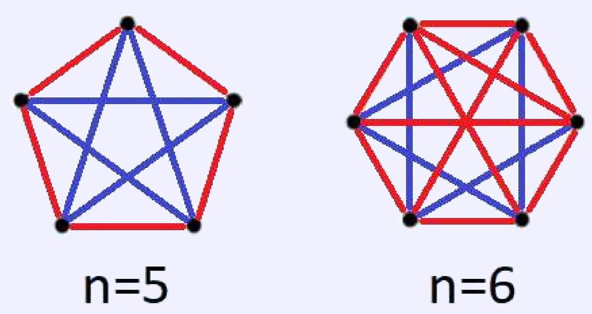
- Dokazati postojanje struktura sa odredenim osobinama
- Donje i gornje ograničenje za neke funkcije
- Ne daje konstruktivno rešenje

**Metod**

- Hoćemo da dokažemo postojanje nekakve strukture
- Posmatramo prozivoljan ishod nekog eksperimenta
- P(random ishod eksperimenta ima željene osobine)
- Ako P $>$ 0, onda postoji struktura sa željenim osobinama

## Ramsey brojevi

**Ramsey broj** $R(k,t)$ je najmanji prirodan broj $n$ takav da se za svako bojenje grana grafa $K_n$ u dve boje (recimo crvenom i plavom) može naći makar jedan podgraf $K_k$ grafa $K_n$ čije su sve grane obojene crvenom bojom ili makar jedan podgraf $K_t$ čije su sve grane obojene plavom bojom.




$R(3,3)=6$

**Teorema 1.** *Ako postoji realan broj $0\leqslant p\leqslant 1$ takav da važi*

$$\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}+\binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}}<1,$$

*onda je $R(k,t)>n$.*

**Teorema 2.** *Za svako $n\in\mathbb{N}$ i $0<p<1$ važi*

$$R(k,t)>n-\left(\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}+\binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}}\right).$$

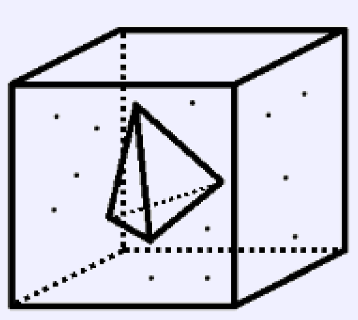
**Teorema 3.** *Ako je*

$$e\left(\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2}+\binom{k}{2}\binom{n-2}{l-2}+1\right)\cdot\left(\frac{\binom{l}{2}}{\binom{k}{2}+\binom{l}{2}}\right)^{\binom{l}{2}}<1,$$

*za $k>l$, onda $R(k,l)>n$, odnosno $R(k,l)=\Omega\left(ke^{\frac{kl^2}{k^2+l^2}}\right)$.*

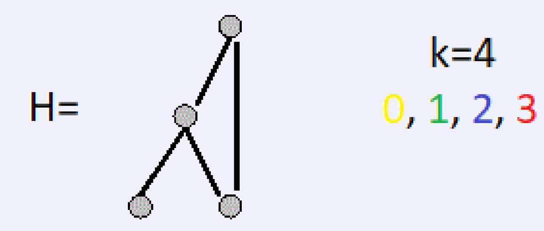
## Rezultat iz geometrije

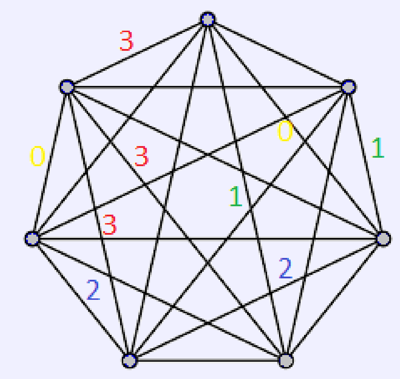
**Tvrđenje 1.** Postoji raspored $n$ tačaka u jediničnoj kocki, takav da je zapremina svakog tetraedtra određenog tim tačkama veća od $\frac{\sqrt{3}}{1024\pi^2n^3}$.



## Zero-sum Ramsey brojevi

**Zero-sum Ramsey broj** $R(G,\mathbb{Z}_k)$ je najmanji broj $n$ takav da za svako bojenje $f:E(K_n)\to\{0,1,...,k-1\}$ grana grafa $K_n$ postoji unutar njega kopija $H$ grafa $G$ za koju važi da je $\sum_{e\in E(H)}f(e)$ deljivo sa $k$.




**Teorema 4.** *Neka je $G$ dati graf sa $m$ grana i $k$ prirodan broj koji deli $m$. Neka su $t,l$ i $s$ prirodni brojevi za koje važi da je $l+s=\binom{t}{2}$. Neka je $S$ broj kopija grafa $G$ unutar $K_t$ i*

$$A=\sum_{i=0}^{\frac{m}{k}}\binom{l}{i\cdot k}\binom{s}{m-i\cdot k}.$$

*Tada, ukoliko važi da je $A\cdot S<\binom{\binom{t}{2}}{m}$ onda je $R(G,\mathbb{Z}_k)>t$.*

**Lema 1.** *Uz oznake iz Teoreme 4 postoji $0\leqslant l\leqslant\binom{t}{2}$ takvo da važi nejednakost*

$$A<\frac{e^{\frac{em^2}{em+k}}(\frac{m}{k}+1)t^{2m}}{m^m2^m}.$$

## Rezultati (probabilistički metod)

- $R(K_n,\mathbb{Z}_k)=\Omega(ne^{\frac{cn}{2e+c}})$ $(c=\frac{2k}{m^2})$ - Poboljšanje rezultata iz korišćene literatre

Rezultati koje smo dobili za slučajeve koji nisu ranije razmatrani:

- $R(K_{p,q},\mathbb{Z}_k)=\Omega((e^{\frac{1}{e+c}}p^{\frac{1}{q}}q^{\frac{1}{p}})^{\frac{pq}{p+q}})$ $(c=\frac{k}{pq})$
- $R(S_n^0,\mathbb{Z}_k)=\Omega(\sqrt{n}e^{\frac{cn}{2e+2c}})$ $(c=\frac{k}{n^2})$
- $R(K_{k_1,k_2,...,k_r},\mathbb{Z}_k)=\Omega(\sqrt[n]{k_1^{k_1}...k_r^{k_r}}e^{\frac{mc}{(e+c)n}})$
- $R(Q_n,\mathbb{Z}_k)=\Omega(e^{\frac{cn}{2e+2c}})$ $(c=\frac{k}{2^{n-1}n})$
- $R(R_{n,r},\mathbb{Z}_k)=\Omega(e^{\frac{cr}{2e+2c}})$

## Rezultati (kombinatorni metod)

- $R(P_{n+1},\mathbb{Z}_k)\geqslant\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor+n$ (Hipoteza: važi jednakost!)
- $R(C_n,\mathbb{Z}_k)\geqslant\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor+n$
- $R(C_n,\mathbb{Z}_n)\geqslant 2n-1$ ($n$-neparno)