IS Petnica, seminar MATEMATIKE
Projekti 2016
Autor: Magdalena Tarajić, Pančevo
Mentor: Nikola Milosavljević, Prirodno-matematički fakultet u Nišu

O pozicionoj igri na grafovima

Magdalena Tarajić
Gimnazija „Uroš Predić“, Pančevo
e-mail: magdalenat098@gmail.com

Apstrakt

Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$, gde je X konačan skup a $\mathcal{A}$ konačna familija podskupova skupa X, jaka poziciona igra nad X predstavlja igru između dva igrača koji naizmenično uzimaju elemente skupa X pri čemu je pobednik onaj koji prvi formira neki od podskupova iz $\mathcal{A}$. Primeri pozicionih igara uključuju poznate igre Iks-Oks i Heks. U radu je dat pregled rezultata iz teorije pozicionih igara, uključujući Erdös-Selfridge kriterijum za Mejker-Brejker tip igara. Centralni deo rada predstavlja uvođenje nove pozicione igre na grafovima i originalne rezultate za pobedničke strategije u zavisnosti od klase grafova i dodatnih parametara igre.

Ključne reči: Poziciona igra, graf, pobednička strategija, familija skupova

1 Uvod

Teorija pozicionih igara je kombinatorna disciplina koja se bavi igrama za dva igrača sa potpunom informacijom i bez elemenata slučajnost. Cilj ove discipline je da obezbedi što efikasniji matematički aparat za analizu ovakvih igara i, najčešće, da odgovori na pitanje "ko pobeđuje?" Iako je ova disciplina u početku uglavnom bila motivisana rekreativnom stranom matematike, u poslednjih nekoliko godina se značajno razvila i trenutno predstavlja jednu od aktuelnijih i centralnih oblasti moderne kombinatorike. Često sa njom, ruku pod ruku, idu i ostale kombinatorne discipline poput Remzijeve teorije, teorije grafova i skupova, probabilističke kombinatorike i teorijskog računarstva. Pregledi rezultata iz pozicione teorije igara mogu se naći u [1, 2].

Primeri pozicionih igara za dva igrača sa potpunom informacijom i bez elemenata slučajnosti se kreću od čisto apstraktnih igara na grafovima/hipergrafovima do popularnih rekreacionih igara poput Heksa, Iks-Oks-a itd. Gledajući ovu drugu kategoriju igara, možemo primetiti da, iako se radi o potpuno različitim igrama, one ipak imaju zajedničku stvar – "pozicije". Naime, igrači kreću iz neke početne pozicije (uglavnom prazna tabla) i svakom potezu prelaze u neku narednu poziciju. Za svaku od pomenutih igara je karakteristično da postoji određeni skup *pobedničkih pozicija* – igrač koji dođe do takve pozicije je pobednik (npr. pozicija sa tri ista simbola u vrsti/koloni/dijagonali u igri Iks-Oks). Ovo je motivacija za generalizaciju ovih igara i njihovog preciznog opisa preko najelementarnijih matematičkih objekata – skupova.

U ovom radu dat je kratak uvod u teoriju pozicionih igara i predstavljena je nova interesantna poziciona igra na grafovima. Rad je organizovan na sledeći način.

U drugom poglavlju data je formalna definicja pozicionih igara i opisane su dve najvažnije kategorije ovih igara – jake i slabe (Mejker–Brejker) pozicione igre. Dato je nekoliko primera poznatih pozicionih igara kao i neki poznati rezultati iz oblasti pozicionih igara na grafovima.

Treće poglavlje sadži ključne teoreme o pobedničkim strategijama za jake i Mejker–Brejker igre sa posebnim osvrtom na Erdös-Selfridge kriterijum za Mejker-Brejker tip igara.

Četvrto poglavlje predstavlja centralni deo rada u kome je predstavljena originalna poziciona igra na grafovima – Igra vlasti. U ovom poglavlju su prezentovani rezultati o pobedničkim strategijama u ovoj igri na različitim klasama grafova kao i rezultati vezani za "nebalansiranu" tj. $p:q$ varijantu ove igre.

U radu se koriste osnovni pojmovi iz teorije igara (pobednička strategija, pozicija, igra za dva igrača) i diskretne matematike (grafovi, diskretna verovatnoća, skupovi). Na nivou celog rada, pod grafom se smatra prost graf (neusmeren graf bez petlji i višestrukih grana). Za graf G, sa $V(G)$ i $E(G)$ označavamo skup njegovih čvorova i grana, redom. Za čvor $u \in V(G)$, sa $d_G(u)$ označavamo stepen čvora u, tj. broj njegovih suseda, u grafu G. Za specijalne klase grafova (put, zvezda, kompletan graf...) se koriste standardne oznake; za više detalja videti npr. [3]

2 Vrste pozicionih igara

Neka je X konačan skup i neka je $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ konačna familija podskupova skupa X. Elemente (skupove) familije A ćemo zvati *pobednički skupovi*. **Poziciona igra** $(X, \mathcal{A})$ nad skupom X predstavlja proces (igru) u kome dva igrača (nadalje ćemo ih označavati kao *Prvi*/*Drugi* ili *Plavi*/*Crveni* pri čemu Plavi igra prvi) naizmenično uzimaju elemente skupa X koji nisu već uzeti u nekom od ranijih poteza. Ishod igre se, zavisno od vrste pozicione igare, jedinstveno određuje na osnovu finalne pozicije u igri tj. na osnovu nekog pravila koje uključuje skupove igrača (nakon uzimanja svih elemenata skupa X) i familiju $\mathcal{A}$; ishod igre u opštem slučaju može biti "pobeda Plavog igrača = poraz Crvenog igrača", "pobeda Crvenog igrača = poraz plavog igrača" i "nerešeno".

U najopštijoj definiciji pozicionih igara učestvuju i dva parametra – prirodni brojevi p i q. Za pozicionu igru $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je $p : q$ igra ukoliko Prvi (Plavi) igrač u svakom potezu uzima p elemenata skupa X koji nisu već uzeti ranije a Drugi (Crveni) igrač uzima q elemenata skupa X koji nisu već uzeti ranije. Definicija sa početka ovog poglavlja je specijalan (ali najčešći) slučaj $1 : 1$ igara, tj. "fer" igara.

U zavisnosti od pravila koja određuju ishod, pozicione igre možemo podeliti u više kategorija od kojih su sledeće dve najvažnije:

- **Jaka poziciona igra** $(X, \mathcal{A})$: pobednik igre je prvi igrač koji sakupi sve elemente nekog skupa $A_i \in \mathcal{A}$; ukoliko nijednom igraču to ne pođe za rukom, igra se završava nerešenim ishodom.

- **Slaba poziciona igra (Mejker–Brejker igra)** $(X, \mathcal{A})$: jedan od igrača (najčešće Prvi tj. Plavi) ima ulogu Mejkera (eng. Maker – onaj koji kreira) a preostali ulogu Brejkera (eng. Breaker – onaj koji ruši). Pobednik igre je Mejker ukoliko uspe da sakupi sve elemente nekog skupa $A_i \in \mathcal{A}$; u suprotnom, pobednik igre je Brejker.

Primetimo da su jake pozicione igre ”simetrične” u smislu da je cilj oba igrača isti dok u Mejker–Brejker igrama igrači imaju potpuno različite ciljeve (Brejker ne mora da osvoji nijedan pobednički skup već samo da spreči Mejkera da učini isto) i tada ne postoji nerešen ishod. U opštem slučaju, igra ne mora da se igra do kraja već se može prekinuti kada neki od igrača ostvari cilj npr. kada neko od igrača sakupi sve elemente nekog skupa familije $\mathcal{A}$.

Posmatrajmo sledeći primer: neka je $X = \{1, 2, 3\}$ i neka je $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. U jakoj pozicionoj igri $(X, \mathcal{A})$, igrači naizmenično uzimaju elemente skupa $\{1, 2, 3\}$ i pobeđu je onaj koji uspe da sakupi ili sve elemente skupa $\{1, 2\}$ ili sve elemente skupa $\{2, 3\}$. Ovde je jasno da Plavi igrač ima pobedničku strategiju tako što na početku uzme element 2. U slučaju Mejker–Brejker igre sa istim parametrima $(X, \mathcal{A})$, ukoliko je Mejker Plavi (Prvi) igrač, on pobeđuje kao u prethodnom slučaju uzimanjem elementa 2, ali ukoliko je Mejker Crveni (Drugi) igrač, tada Brejker pobeđuje uzimanjem elementa 2 i Mejker više ne može da sastavi pobedničke skupove.

Igra Iks–Oks je verovatno najpoznatiji primer jake pozicione igre među ne–apstraktnim igrama; zaista, označimo polja tablice 3×3 brojevima od 1 do 9 pri čemu numeraciju vršimo po redovima odozgo nadole a u okviru svakog reda po kolonama sleva udesno. Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Upisivanje znaka ’iks’ u neko polje možemo zamisliti kao uzimanje odgovarajućeg elementa skupa X od strane Plavog igrača i analogno za upisivanje znaka ’oks’ i Crvenog igrača.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Igrač je pobedio ukoliko je sakupio sve brojeve u nekoj vrsti, koloni ili dijagonali (npr. ako je igrač označio ceo drugi red to znači da je sakupio sve elemente skupa $\{4, 5, 6\}$, glavna dijagonala odgovara skupu $\{1, 5, 9\}$ itd.). Nije teško zaključiti da ukupno ima 8 pobedničkih skupova i da je to baš familija skupova

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{1, 5, 9\}, \{3, 5, 7\}\}.$$

Zaključujemo da je Iks-Oks jaka poziciona igra $(X, \mathcal{A})$ za prethodno definisane X i $\mathcal{A}$. Poznato je da Iks–Oks nerešena igra a to se može dodatno potvrditi analizom slučajeva u opisanoj jakoj pozicionoj igri. Međutim, primetimo da ukoliko posmatramo Mejker-Brejker igru $(X, \mathcal{A})$ sa Prvim igračem kao Mejkerom, tada Prvi igrač (”iks”) ima pobedničku strategiju. Zaista, u tom slučaju Mejker želi samo da poveže 3 polja sa znakom ”iks” *ali* nije mu bitno da li je drugi igrač u međuvremenu uspeo da odradi isto znakom ”oks”. Jedan trivijalan način je da odabere centralno polje (broj 5) a zatim neko od ugaonih polja (zavisno od poteza Brejkera).*

Još jedan interesantan primer poznate pozicione igre je je igra Hex koja se igra na heksagonalnoj tabli oblika romba. U najčešćim varijantama igre, tabla je veličine 11×11 a igrači poseduju dve suprotne stranice romba i u svakom potezu, naizmenično, boje svojom bojom po jedan šestougao. Cilj svakog igrača je da napravi put od šestouglova svoje boje između svojih strana romba.

Jasno je da ovo nije jaka poziciona igra jer igrači nemaju isti cilj (tj. pobednički skupovi ne bi bili isti za oba igrača). Sa druge strane, iako to nije očigledno, može se dokazati da se igra ne može završiti nerešeno i da zbog toga pripada kategoriji Mejker–Brejker igara (ako Drugi igrač spreči drugog da napravi put, to znači da je on uspeo da napravi svoj put) kao i da Prvi igrač

*Ostavlja se zainteresovanom čitaocu da odredi tačnu strategiju Mejkera.

ima pobedničku strategiju – ove rezultate prvi je dao poznati matematičar i nobelovac Džon Neš.

Neke od najviše analiziranih pozicionih igara u poslednjih nekoliko godina su pozicione igre na grafovima, videti npr. [4, 5]. Postavka je jednostavna: fiksira se proizvoljan graf G, za skup X se uzme skup grana $E(G)$ dok je problem definisan odabirom familije $\mathcal{A}$ podskupova grana $E(G)$. Za familiju $\mathcal{A}$ se najčešće odabiraju poznate klase grafova poput puteva, ciklusa, kompletnih grafova date veličine, trouglova, povezanih grafova itd. Npr. ukoliko je $\mathcal{A}$ skup svih trouglova grafa G (tj. svaki skup iz $\mathcal{A}$ se sastoji iz 3 grane koje obrazuju trougao), cilj svakakog igrača je da izabere grane koje čine neki trougao u grafu G. Sve pozicione igre na grafovima mogu se igrati i u jakoj varijanti i u Mejker-Brejker varijanti.

Jedna od najpoznatijih pozicionih igara na grafovima je Igra povezivanja (*Shannon switching game*) koja pripada klasi Mejker–Brejker igara. Na početku je dat graf G i dva fiksirana čvora u i v u njemu. Igrači naizmenično uzimaju grane grafa – cilj Mejkera je da pomoću svojih grana uspe da poveže čvorove u i v dok je cilj Brejkera da ga spreči; ovde je skup $X = E(G)$ dok je $\mathcal{A}$ skup svih povezanih podgrafova grafa G koji sadrže i čvor u i čvor v. (tj. grana takvih podgrafova). Za ovu igru postoji jako lep i netrivijalan rezultat dat sledećom teoremom.

Teorema 2.1 (Lehman [6]) *U Igri povezivanja nad grafom G sa fiksiranim čvorovima u i v pobeđuje Mejker (bez obzira da li igra prvi) ako i samo ako postoji podgraf grafa G koji sadrži čvorove u i v i koji sadrži dva po granama disjunktna razapinjuća stabla.*

3 Kriterijumi za pobedu u pozicionim igrama

U jakim pozicionim igrama ciljevi igrača su simetrični – iako ovo možda sugeriše na "ravnopravnost", ipak se ispostavlja da u ovakvim igrama Prvi igrač ima ogromnu prednost. Zaista, ukoliko je cilj sakupiti elemente nekog skupa, intuitivno je jasno da ako igrač koji ima potez prednosti to ne može postići, onda to nikako ne može postići ni Drugi igrač.

Teorema 3.1 *U svakoj jakoj pozicionoj igri $(X, \mathcal{A})$, Prvi Igrač može obezbediti bar nerešen rezultat.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da Drugi igrač (DI) ima pobedničku strategiju $\mathcal{S}$ u nekoj jakoj pozicionoj igri $(X, \mathcal{A})$. Strategija predstavlja skup preciznih pravila koji opisuju kako da DI odgovori na svaki potez Prvog igrača (PI) tako da na kraju pobedi tj. sakupi sve elemente nekog pobedničkog skupa. Prvi igrač može "ukrasti" strategiju $\mathcal{S}$ i prilagoditi je sebi na sledeći način: Prvi igrač odigra prvi potez proizvoljno a zatim se "pretvara" da je Drugi igrač (ignorišući svoj prvi potez). Preciznije, nakon svakog poteza DI–a, PI odigra potez na osnovu strategije $\mathcal{S}$ na sledeći način: ukoliko treba uzeti element skupa X koji nije još uvek uzet, on ga uzima; ukoliko treba uzeti element koji je on već uzeo u prethodnom proizvoljnom (ignorisanom) potezu, PI zamisli da je taj element uzeo u trenutom potezu a zapravo uzme novi proizvoljni element skupa X (koji ignoriše do sledeće slične situacije).

Ovde je bitno uočiti da ovi dodatni proizvoljni potezi mogu samo da koriste PI–u (tj. ne može dospeti u "goru" poziciju zbog njih) i zato ih PI može ignorisati do trenutka kada se odgovarajući element pojavi u strategiji. Kako je po pretpostavci $\mathcal{S}$ pobednička strategija za Drugog igača, PI će ignorisanjem svog početnog poteza i primenom ove strategije osvojiti neki pobednički skup pre DI–a. Sledi da zapravo PI ima pobedničku strategiju što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle, pretpostavka je netačna, tj. Drugi igrač ne može imati pobedničku strategiju ni u jednoj jakoj pozicionoj igri. □

U prethodnom dokazu korišćena je tehnika *krađe strategije* – ovom tehnikom se dokazuje *(ne)postojanje* pobedničke strategije bez njene eksplicitne konstrukcije. Zaključujemo da se jaka poziciona igra uvek završava ili pobedom Prvog igrača ili nerešenim rezultatom.

Ukoliko posmatramo Mejker–Brejker igre $(X, \mathcal{A})$, postoji dovoljan (ne i potreban) uslov za Brejkerovu pobedu koji zavisi samo od veličina skupova iz $\mathcal{A}$. Ovaj uslov je zapravo poznati rezultat Erdoša i Selfriža poznat kao Erdös-Selfridge kriterijum. Ovaj kriterijum je značajan jer osim što dokazuje postojanje, on daje i eksplicitnu strategiju za Brejkera koja se ispostavlja da je grabljivog (eng. greedy) tipa. Opisana strategija ujedno predstavlja i prvi deterministički algoritam za 2–bojenje hipergrafova što dodatno daje na značaju ovog rezultata.

Teorema 3.2 (Erdös-Selfridge kriterijum, [7]) *Neka je X konačan skup i $\mathcal{A}$ konačna familija podskupova skupa X. Ukoliko važi $\sum_{A \in \mathcal{A}} 2^{-|A|} < \frac{1}{2}$, tada u Mejker–Brejker igri $(X, \mathcal{A})$, u kojoj je Prvi igrač Mejker, pobeđuje Brejker.*

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan trenutak igre kada je Brejker na potezu. Intuitivno, Brejkeru je u interesu da proceni koji od pobedničkih skupova $A \in \mathcal{A}$ je u "najvećoj opasnosti" da bude osvojen od strane Mejkera i da uzme neki slobodan element (tj. element koji nije već uzet ranije) tog skupa. Jedan od načina da se kvantifikuje pomenuta "opasnost" je da se opasnost skupa $A \in \mathcal{A}$ *u datom trenutku igre* definiše kao verovatnoća da taj skup na kraju pripadne Mejkeru pod pretpostavkom da Mejker i Brejker uzimaju elemente uniformno nasumično. Prema tome, opasnost skupa $A \in \mathcal{A}$ je 0 ukoliko Brejker već poseduje bar jedan njegov element, a u suprotnom 2^{-x} gde je x broj slobodnih elementa skupa A.

Sada se prirodno nameće definicija opasnosti familije $\mathcal{A}$, u oznaci $danger(\mathcal{A})$, *u datom trenutku igre* kao suma opasnosti pobedničkih skupova, tj.

$$danger(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ A \cap B = \emptyset}} 2^{-|A \setminus M|}$$

gde su $M \subseteq X$ i $B \subseteq X$ skupovi elemenata koje su u datom trenutku igre uzeli Mejker i Brejker, redom.

Po uslovu teoreme, na početku igre važi

$$danger(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} 2^{-|A|} < \frac{1}{2}.$$

Za svako i, neka je $M_i = \{m_1, \ldots, m_i\}$ skup elemenata koje je uzeo Mejker neposredno nakon i-tog poteza i neka je $B_{i-1} = \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ skup elemenata koje je uzeo Brejker neposredno pre i-tog poteza. Nakon Mejkerovog i-tog poteza, skup slobodnih elemenata je $X_i = X \setminus (B_{i-1} \cup M_i)$ dok se familija pobedničkih skupova redukuje na $\mathcal{A}_i = \{A \setminus M_i : A \in \mathcal{A}, A \cap B_{i-1} = \emptyset\}$ tj. ostaci pobedničkih skupova iz kojih Brejker nije uzeo nijedan element (obratiti pažnju da je $\mathcal{A}_i$ *multiset*).

U svom prvom potezu Mejker uzima element m_1 i povećava opasnost svakom pobedničkom skupu koji sadrži m_1 za faktor 2, dok ostali pobednički skupovi zadržavaju istu opasnost. Dakle,

$$danger(\mathcal{A}_1) \leq 2 \cdot danger(\mathcal{A}) < 1.$$

Pokažimo da postoji strategija za Brejkera koja mu omogućuje da u svakom trenutku održava ukupnu opasnost ispod vrednosti 1. Definišimo strategiju $\mathcal{S}$ za Brejkera na sledeći način: u i-tom potezu, uzeti element b_i tako da se vrednost $danger(\mathcal{A}_i)$ smanji najviše moguće, tj. u

i-tom potezu uzeti element $b_i \in X_i$ koji maksimizuje vrednost izraza $\sum_{b \in A \in \mathcal{A}_i} 2^{-|A|}$ među svim elementima $b \in X_i$ (jer će se opasnosti svih skupova $A \in \mathcal{A}_i$ koji sadže b_i anulirati kada Brejker uzme taj element). U slučaju više mogućih izbora za b_i, Brejker može uzeti bilo koji od njih.

Nakon Mejkerovog $(i+1)$-og poteza (uzimanje elementa m_{i+1}), opasnost trenutne familije se povećava dupliranjem odgovarajućih opasnosti skupova i nova opasnost je:

$$\begin{aligned} danger(\mathcal{A}_{i+1}) &= danger(\mathcal{A}_i) - \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_i \\ b_i \in A}} 2^{-|A|} + \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_i \\ m_{i+1} \in A}} 2^{-|A|} - \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_i \\ b_i, m_{i+1} \in A}} 2^{-|A|} \\ &\leq danger(\mathcal{A}_i) - \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_i \\ b_i, m_{i+1} \in A}} 2^{-|A|} \\ &\leq danger(\mathcal{A}_i) \end{aligned}$$

Zaista, u prvoj jednakosti je, zbog dupliranja, dodata vrednost opasnosti svih skupova $A \in \mathcal{A}_i$ (druga suma u jednakosti) koji koji sadrže m_{i+1} ali to je korigovano oduzimanjem vrednosti opasnosti svih skupova koji sadrže i m_{i+1} i b_i (treća suma u jednakosti) jer je Brejker izborom b_i već anulirao opasnosti tih skupova (prva suma u jednakosti). Prva nejednakost sledi na osnovu strategije $\mathcal{S}$ za izbor b_i: u i-tom potezu je Brejker imao opciju da uzme i m_{i+1} ali je izabrao b_i što znači da je suma opasnosti skupova koji sadže b_i veća ili jednaka sumi opasnosti skupova koji sadrže m_{i+1}.

Prema tome, ako se Brejker pridržava strategije $\mathcal{S}$, na osnovu prethodnih nejednakosti sledi da za svako i važi

$$danger(\mathcal{A}_i) \leq danger(\mathcal{A}_1) < 1.$$

Ukoliko bi postojao broj i takav da je Mejker ipak pobedio u i-tom potezu, to bi značilo da $\emptyset \in \mathcal{A}_i$. Ali tada bi taj skup doprineo opasnosti sa $2^{-|\emptyset|} = 1$, što je, u kontradikciji sa prethodnom nejednakosti. Dakle, strategija $\mathcal{S}$ je zaista pobednička za Brejkera. □

4 Igra vlasti

Neka je G graf. **Igra vlasti** nad grafom G je igra za dva igrača u kojoj igrači naizmenično vuku poteze pri čemu se svaki potez sastoji u sledećem: trenutni igrač bira proizvoljnu neobojenu granu grafa G (na početku nijedna grana nije obojena) i boji je svojom bojom – Prvi (Plavi) igrač u plavo a Drugi (Crveni) igrač u crveno. Igra se završava kada se sve grane grafa oboje i tada se svaki čvor v grafa boji na sledeći način: ukoliko je v incidentatn sa više plavih nego crvenih grana, v se boji u plavo; ukoliko je v incidentan sa više crvenih nego plavih grana, v se boji u crveno; inače (v je incidentant sa jednakim brojem crvenih i plavih grana) čvor v ostaje neobojen. Pobednik je onaj igrač koji ima više čvorova svoje boje; ukoliko je na kraju jednak broj plavih i crvenih čvorova, igra se završava nerešeno.

Igru vlasti nad grafom G biće označavana kao $I(G)$. Za početak, potrebno je ustanoviti kojoj kategoriji pozicionih igara pripada ova igra (i da li uopšte pripada nekoj od dve pomenute kategorije).

Teorema 4.1 *Za proizvoljan graf G, igra $I(G)$ je jaka poziciona igra.*

Dokaz. Označimo sa X skup grana grafa G. Za proizvoljan skup grana $E' \subseteq E(G)$ označimo sa $G' = (V(G), E')$. Ukoliko je broj čvorova $v \in V(G)$ za koje važi $d_{G'}(v) > \frac{1}{2} d_G(v)$ veći od broja čvorova u za koje važi $d_{G'}(u) < \frac{1}{2}d_G(u)$, tada skup grana E' nazovimo *dobrim.* Neka je $\mathcal{A}$ familija svih dobrih skupova grana. Očigledno su svi elementi familije $\mathcal{A}$ podskupovi skupa X. Dokažimo da je $I(G)$ zapravo jaka poziciona igra $(X, \mathcal{A})$.

Zaista, bojenje grana možemo zamisliti kao (naizmenično) uzimanje elemenata skupa X. Dovoljno je dokazati da neko od igrača pobeđuje ako i samo ako na kraju igre njegov skup uzetih grana (tj. grana obojenih njegovom bojom) pripada familiji $\mathcal{A}$. Međutim, uslov $d_{G'}(v) > \frac{1}{2}d_G(v)$ zapravo znači da je čvor v incidentan sa više grana iz E' nego sa granama iz $E(G) \setminus E'$ tj. da se boji u boju igrača koji je izabrao (obojio) grane skupa E'. Kako za dobar skup grana E' (po definiciji) takvih čvorova ima više nego onih koji su obojeni protivničkom bojom, sledi da igrač pobeđuje ako i samo ako je obojio sve grane nekog dobrog skupa E' što je i trebalo dokazati. $\square$

Igru vlasti ćemo posmatrati i varijanti kada igrači ne moraju bojiti tačno jednu granu po potezu, tj. u opštijoj $p : q$ varijanti i u tom slučaju ćemo je označavati kao $I_{p:q}(G)$ gde je G graf na kome se igra. Po konvenciji $I(G) = I_{1:1}(G)$.

U narednih nekoliko teorema biće analizirane pobedničke strategije na specijalnim klasama grafova. Napomenimo da na osnovu Teorema 4.1 i 3.1 sledi da u Igri vlasti ili pobeđuje Plavi igrač ili se igra završava nerešeno. Zato formulaciju "Plavi igrač pobeđuje ako i samo ako važi uslov F" treba shvatiti kao "Ukoliko važi uslov F, tada pobeđuje Plavi igrač; inače je igra nerešena".

Teorema 4.2 *Neka je n prirodan broj i S_n zvezda graf sa n čvorova. U igri $I(S_n)$ pobeđuje Plavi igrač ako i samo ako je n paran broj.*

Dokaz. Nezavisno od toga kako Plavi i Crveni budu igrali, Plavi će obojiti $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ krakova a Crveni će obojiti $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ krakova zvezde S_n. Ukoliko je n neparan, dobićemo po $\frac{n-1}{2}$ crvenih i plaviih čvorova dok će centralni čvor biti neobojen (nerešena igra). U suprotnom (n je paran), Plavi će imati više obojenih krakova i samim tim i više čvorova stepena 1 kao i centralni čvor pa će pobediti. $\square$

Teorema 4.3 *Neka je n prirodan broj i P_n put sa n čvorova. U igri $I(P_n)$ pobeđuje Plavi igrač ako i samo ako je n paran broj.*

Dokaz. Ukoliko je n neparan broj, graf P_n sadrži paran broj grana i Crveni igrač može koristiti simetričnu strategiju u odnosu na centralni čvor puta, tj. da u svakom potezu oboji granu centralno-simetričnu centralnom čvoru puta P_n. Na ovaj način on postiže da na kraju ima jednak broj plavih i crvenih čvorova jer zbog opisane strategije za svaki čvor v_i puta P_n važi da je on crven ako i samo ako je čvor v_{n-i+1} plav i obratno. Dakle, u ovom slučaju igra je nerešena.

Ukoliko je n paran broj, Plavi može obojiti centralnu granu $v_{\frac{n}{2}}v_{\frac{n}{2}+1}$ i primeniti centralno simetričnu strategiju u odnosu na ovu granu. Slično kao i u prethodnom slučaju, među svim čvorovima $V(P_n) \setminus \{v_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}\}$ biće jednak broj crvenih i plavih dok će jedan od ova dva čvora biti neobojen a drugi obojen u plavo. Prema tome, primenom ove strategije Plavi će na kraju imati čvor više i pobediti. $\square$

Teorema 4.4 *Neka su n i m prirodni brojevi i $G_{n,m}$ grid-graf dimenzije $n \times m$. U igri $I(G_{n,m})$ pobeđuje Plavi igrač ako i samo ako su brojevi n i m različite parnosti.*

Dokaz. Nacrtajmo grid–graf $G_{n,m}$ u ravni kao odgovarajuću kvadratnu mrežu i označimo sa $v_{i,j}$ čvor koji se nalazi u i-toj ($i = 1, 2, \dots, n$) vrsti i j-oj ($j = 1, 2, \dots, m$) koloni kvadratne mreže.

Ukoliko su brojevi n i m iste parnosti, centar simetrije kvadratne mreže je ili neki čvor (ako su oba broja neparna) ili centar nekog kvadrata (ako su oba broja parna). U oba slučaja, Crveni igrač može da igra centralno–simetrično Plavom igraču tj. da u svakom potezu oboji granu centralno–simetričnu u odnosu na granu koju je u prethodnom potezu obojio Plavi igrač. Ovim se postiže da na kraju uvek ima jednak broj crvenih i plavih čvorova. Zaista, zbog pomenute simetrije, na kraju źa svaki čvor $v_{i,j}$ važi da je on crven akko je čvor $v_{n+1-i,m+1-j}$ plav i obratno; dodatno, u slučaju neparnih vrednosti n i m centralni čvor će biti neobojen. Prema tome, ako su n i m iste parnosti, igra je nerešena.

Neka su n i m različite parnosti i neka je, bez umanjenja opštosti, n paran. U prvom potezu Plavi može obojiti centralnu granu $v_{\frac{n}{2},\frac{k+1}{2}}v_{\frac{n}{2}+1,\frac{k+1}{2}}$ a zatim igati *osno-simetrično* (ne centralno-simetrično) u odnosnu na centralnu kolonu. Koristeći ovu strategiju, Plavi postiže da na kraju među svim čvorovima grafa $G_{n,m}$, osim onih na centralnoj koloni, ima jednak broj plavih i crvenih. Centralna kolona je zapravo graf izomorfan putu P_m koji je neparne dužine. Zbog simetričnog bojenja, svaki čvor ovog puta će imati po jednu plavu i crvenu horizontalnu granu i boja čvorova na tom putu će zavisiti isključivo od bojenja grana na tom putu. Kako je Plavi već obojio centralnu granu tog puta i koristi simetričnu strategiju, na osnovu Teoreme 4.3 on na tom putu osvaja čvor više i pobeđuje. □

Teorema 4.5 *Neka je $n \geq 4$ prirodan broj i W_n točak-graf sa n čvorova. Igra $I(W_n)$ se uvek završava nerešenim rezultatom.*

Dokaz. Nacrtajmo točak W_n kao pravilni $(n-1)$-tougao u ravni čija su sva temena spojena sa centrom njegove opisane kružnice. Označimo čvor u centru sa v a čvorove na $(n-1)$-touglu sa $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ u fiksiranom smeru.

Posmatrajmo prvo slučaj kada je n neparan broj. Tada je nacrtani $(n-1)$-tougao centralno-simetričan i Crveni može bojiti grane centralno simetrično u odnosu na centar mnogougla. Zbog simetrije, na mnogoulu će na kraju biti jednak broj crvenih i plavih čvorova dok će centralni čvor ostati neobojen jer će imati po $\frac{n-1}{2}$ crvenih i plavih grana. Prema tome, u ovom slučaju igra se završava nerešenim rezultatom.

Pretpostavimo sada da je n paran broj i pokažimo da i u ovom slučaju postoji strategija koja Crvenom donosi nerešen rezultat. Zarad skraćene notacije, uvedimo oznaku $x = \frac{n}{2}$. Razlikovaćemo dva podslučaja:

Podslučaj 1: U prvom potezu Plavi je obojio neku stranicu mnogougla. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je ta obojena stranica $v_x v_{x+1}$. Normala iz centra mnogougla na stranicu $v_x v_{x+1}$ prolazi kroz teme v_1 i predstavlja jednu osnu simetriju ovog mnogougla. Crveni može obojiti granu $v_1 v$ u crveno i nadalje bojiti grane simetrično u odnosu na Plavog igrača u odnosu na pomenutu normalu. Koristeći ovu strategiju, on postiže da na kraju među svim čvorovima $V(W_n) \setminus \{v, v_1, v_x, v_{x+1}\}$ ima jednak broj plavih i crvenih. Dodatno, čvorovi v i v_1 će zbog simetrije imati jednu crvenu granu više i biće obojeni u crveno. Dakle, bar polovina obojenih čvorova biće crvena i Crveni će izvući nerešen rezultat (po Teoremi 3.1 Crveni ne može pobediti).

Podslučaj 2: U prvom potezu Plavi je obojio neku duž koja spaja teme i centar mnogougla. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je ta obojena duž vv_1. Crveni može obojiti granu $v_x v_{x+1}$ u crveno i, analogno prethodnom slučaju, bojiti grane simetrično u odnosu na Plavog igrača u odnosu na simetralu duži $v_x v_{x+1}$ ali uz par izuzetaka: ukoliko Plavi oboji neku od grana $v_{x-1}v_x$, vv_x, $v_{x+1}v_{x+2}$, vv_{x+1}, Crveni će, umesto odgovarajuće simetrične grane, bojiti, redom, grane vv_x, $v_{x-1}v_x$, vv_{x+1}, $v_{x+1}v_{x+2}$. Nije teško uočiti da se ovom strategijom postiže da da na kraju među svim čvorovima $V(W_n) \setminus \{v, v_1, v_{x-1}, v_x, v_{x+1}, v_{x+2}\}$ ima jednak broj plavih i crvenih. Da bismo pokazali da ova strategija dovodi do nerešenog rezultata, dovoljno je dokazati da su od preostalih 6 čvorova bar 3 crvena. Opisanom modifikacijom simetrične strategije Crveni postiže da su na kraju čvorovi v_x i v_{x+1} sigurno crveni. Trivijalnom analizom slučajeva bojenja pomenutih 4 grana vidi se da se Crveni dodatno obezbeđuje da će ili čvor v biti crven ili da će bar jedan od čvorova v_{x-1} ili v_{x+2} biti crven. Prema tome, i u ovom slučaju se igra završava nerešeno. $\square$

Osim analize pobedničkih strategija klasične varijante Igre vlasti u raznim klasama grafova, jedan od interesantnih problema je razmatrati $p : q$ varijante Igre vlasti na kompletnom grafu K_n. Specijalno, naredna teorema govori o odnosu između parametara p i q tako da Plavi igrač pobeđuje u igri $I_{p:q}(K_n)$ bez obzira na to koju strategiju primenjuje tj. bez obzira na to kojih p grana boji u svom potezu.

Teorema 4.6 *Neka je n prirodan broj, K_n kompletan graf sa n čvorova i p, q prirodni brojevi za koje važi $p > 3q$. Tada je u igri $I_{p:q}(K_n)$ svaka strategija Plavog igrača – pobednička.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da Crveni igač ima strategiju koja dovodi do nerešenog rezultata ili njegove pobede. Posmatrajmo graf na kraju igre i označimo sa G' graf kome je skup čvorova $V(K_n)$ i kome je skup grana – skup svih grana grafa K_n koje je Crveni obojio (crveno). Da Crveni ne bi izgubio, potreban (ali ne i dovoljan) uslov je da na kraju nema više od $\frac{n}{2}$ plavih čvorova. Da bi se to desilo, bar $\frac{n}{2}$ čvorova mora imati bar $\frac{n-1}{2}$ crvenih grana (stepen svakog čvora u grafu K_n je $n-1$) tj. u grafu G' bar $\frac{n}{2}$ čvorova moraju imati stepen bar $\frac{n-1}{2}$. Kako je zbir stepena čvorova u grafu jednak dvostrukom broju grana tog grafa, dobijamo da graf G' sadrži bar $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{8}$ grana. Na osnovu definicie grafa G', to znači da Crveni ne bi izgubio, on mora da oboji u crveno bar $\frac{n(n-1)}{8}$ grana.

Sa druge strane, kako graf K_n sadrži $\binom{n}{2}$ grana a u svakom potezu Plavi igrač boji p a Crveni q grana, sledi da Crveni ne može obojiti više od $\frac{q}{p+q}\binom{n}{2}$ grana. Na osnovu poslednja dva zaključka, sledi da mora važiti

$$\frac{q}{p+q}\binom{n}{2} \geq \frac{n(n-1)}{8}.$$

Prethodna nejednakost je ekvivalentna sa $\frac{q}{p+q} \geq \frac{1}{4}$ što je ekvivalentno sa $4q \geq p+q$ odnosno $p \leq 3q$. Međutim, po uslovu teoreme važi $p > 3q$ pa smo došli do kontradikcije i početna pretpostavka nije tačna, tj. u ovoj varijanti Igre vlasti Crveni igrač uvek gubi, bez obzira na igru Plavog igrača. $\square$

Ukoliko se uslov $p > 3q$ iz prethodne teoreme oslabi, argument o brojanju grana iz prethodnog dokaza se ne može primeniti i Plavi igrač se zapravo mora "potruditi" da bi pobedio (ukoliko uopšte ima pobedničku strategiju). Za kraj, navodimo hipotezu o proizvoljnim grafovima i oslabljenom uslovu za parametre p i q.

Hipoteza 4.7 *Neka je G proizvoljan graf sa bar jednom granom i neka su p i q prirodni brojevi za koje važi $p \geq 2q$. Tada u igri $I_{p:q}(G)$ Plavi igrač ima pobedničku strategiju.*

Literatura

[1] D. Hefetz et. al., *Positional Games*, Springer Basel, 2014.

[2] J. Beck, *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 114, Cambridge University Press, 2008.

[3] D. Stevanović et. al., *Diskretna matematika: osnove kombinatorike i teorije grafova*, Društvo Matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[4] D. Hefetz, S. Stich, *On two problems regarding the Hamilton cycle game*, Electronic Journal of Combinatorics 16 (1), 2009.

[5] H. Gebauer, *On the Clique-Game*, European Journal of Combinatorics 33 (2012), 819.

[6] A. Lehman, *A Solution of the Shannon Switching Game*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 12 (4) (1964), 687-725.

[7] P. Erdös, J. L. Selfridge, *On a combinatorial game*, Journal of Combinatorial Theory Series A 14 (1973), 298-301.

On a positional game on graphs

Abstract

For a given ordered pair (X, A), where X denotes a finite set and A is a finite family of subsets of X, a positional game on X is a two-player game where players alternatively take elements of X until one of them (the winner) forms a subset from A. Examples of positional games include Tic-tac-toe and Hex. In this paper we give a brief survey of results on positional game theory including Erdös-Selfridge criteria for Maker-Breaker type of games. Our main result is an introduction of a new positional game on graphs for which we give original results regarding winning strategy for some classes of graphs and additional parameters.

Key words: Positional game, graph, winning strategy, family of sets.