O lavirintima i ugrađivanju stabala u grid grafove

Tijana Jakšić
Gimnazija „Uroš Predić”
tiki.jaksic@gmail.com

Isidora Poznanović
Prva kragujevačka gimnazija
isidorapoznanović1@gmail.com

eat sleep math

Uvod

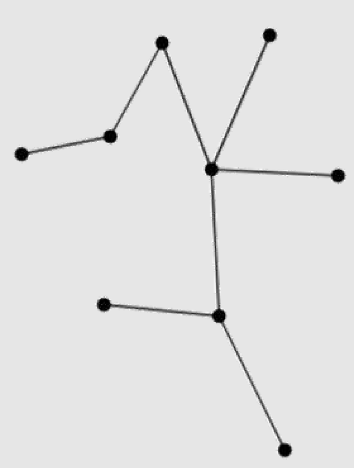
Svaki klasični pravougaoni lavirint se može predstaviti grafom tako da čvorovi predstavljaju raskrsnice i “ćorsokake” (potencijalno i još neke delove lavirinta) a grane – puteve u lavirintu između odabranih čvorova. Pomenuti laviritnti nemaju nepovezanih delova i između svake dve tačke postoji jedinstven put pa je njima odgovarajući graf zapravo *stablo* koje se može shvatiti kao “gruba šema” lavirita. Intresantno je razmatrati problem dizajna lavirinta na osnovu datog stabla; ovo spada u probleme *ugrađivanja grafova*, konkretno – ugrađivnja stabala u grid grafove. Za dato stablo T sa n čvorova, prirodna se nameću neka pitanja poput: “Koji su potrebni i dovoljni uslovi da se od stabla T napravi (klasični) lavirint? Ako je moguće napraviti laviritnt, koja je najmanja moguća površina ili širina laviritna? Koliko komplikovani lavirinti mogu mogu biti ako je mera kompleksnosti broj izbora prilikom skretanja, npr. broj raskrsnica stepena 3 i 4?”. U radu je analizirana pomenuta problematika i dati su odgovori na većinu postavljenih pitanja.

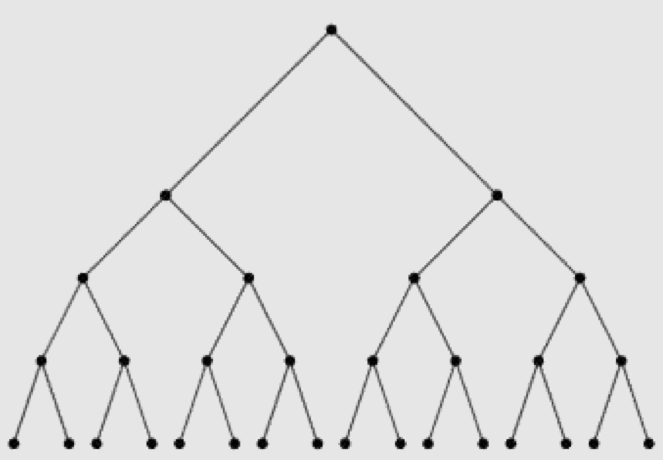
Osnovni pojmovi

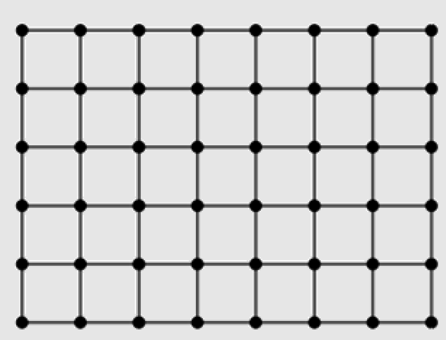
Stablo je povezan graf bez ciklusa.

***k*-narno stablo** dubine n (u oznaci $RT_{k,n}$, $k, n \in N$) je stablo u kome tačno jedan čvor (*koren stabla*) ima stepen k, svi čvorovi različiti od korena imaju stepen $k+1$ ili 1 i svi čvorovi stepena 1 su na rastojanju n od korena.

Grid graf dimenzije $n \times m$, u oznaci $G_{n,m}$, je graf čiji je skup čvorova $\{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,m\}$, pri čemu su čvorovi (a,b) i (c,d) povezani akko je ($|a-c| = 1 \wedge b = d$) ili ($a = c \wedge |b-d| = 1$). Vrednost $\min\{n,m\}$ naziva se **širinom** a vrednost $n \cdot m$ **površinom** grid grafa.

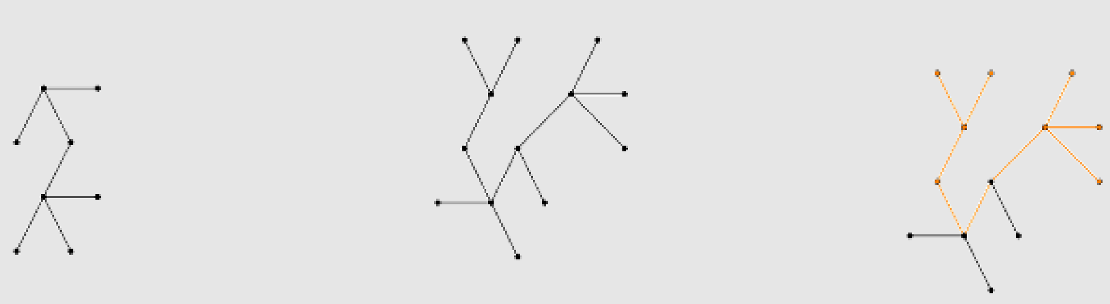

Stablo


k-narno stablo


Grid-graf

Ugrađivanje grafova

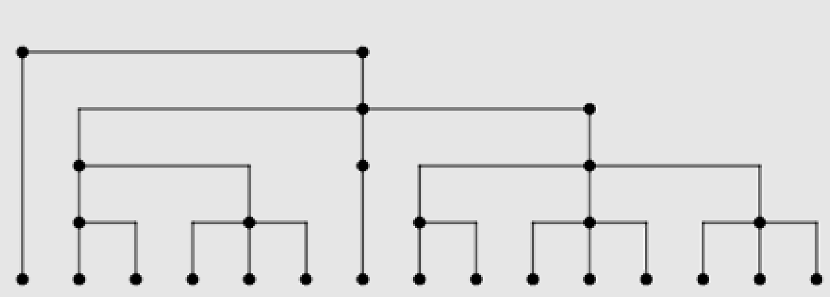
Ugrađivanje grafa *G* u graf *H* predstavlja par preslikavanja (f, g) gde je f injektivno preslikavanje iz skupa $V(G)$ u skup $V(H)$ a g preslikavanje koje svaku granu uv grafa G slika u put između čvorova $f(u)$ i $f(v)$ u grafu H, pri čemu su putevi iz $g[E(G)]$ međusobno disjunktni osim eventualno u krajnjim čvorovima.



$\Delta(T)$ predstavlja maksimalan stepen čvora u stablu T, $r(T)$ je radijus stabla T, dok $A(T)$ označava minimalnu površinu grid grafa u koji se može ugraditi stablo T.

TEOREMA 1

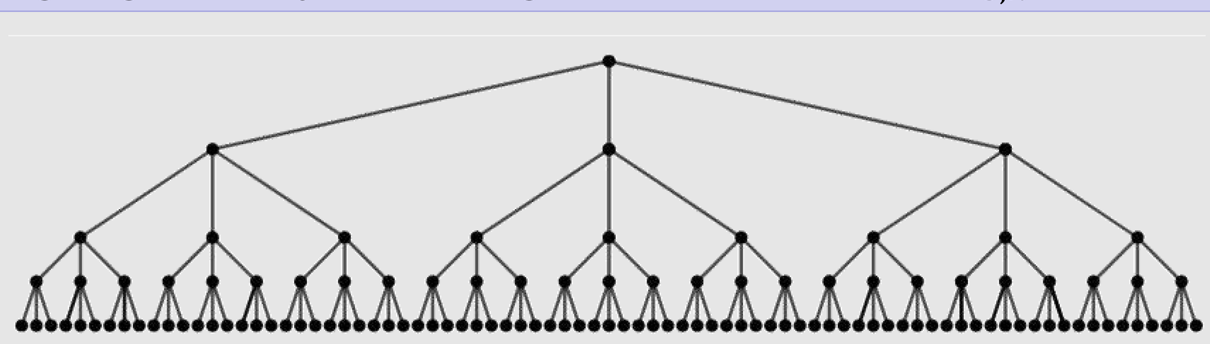
Stablo T se može ugraditi u grid graf ako i samo ako važi $\Delta(T) \leq 4$. U tom slučaju važi $A(T) \leq n \cdot (r(T) + 2)$.



Dimenzije lavirinta

TEOREMA 2

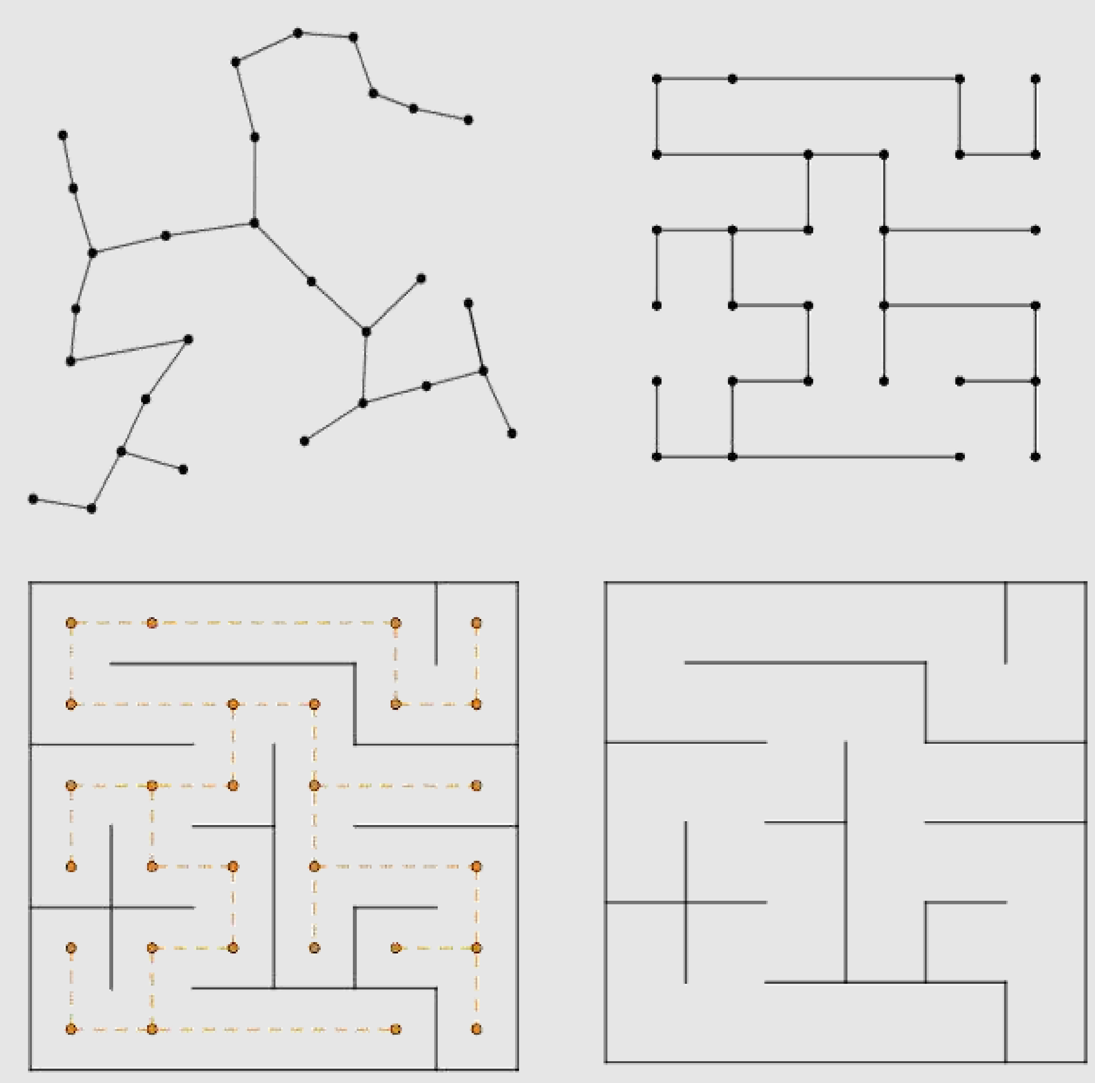
Najmanja širina grid grafa u koji se može ugraditi ternarno stablo $RT_{3,n}$ iznosi $n - 1$.



Savršeno ugrađivanje

Savršeno ugrađivanje grafa G u graf H je ugrađivanje grafa G u graf H pri čemu svaki čvor grafa H pripada ili $f[V(G)]$ ili nekom putu iz $g[E(G)]$. *Intuitivno, savršeno ugrađivanje predstavlja “poptuno popunjavanje”.*

Deformisanje stabla tako da čini strukturu lavirinta se može posmatrati kao savršeno ugrađivanje stabla u grid graf



TEOREMA 3

Stablo T se može savršeno ugraditi u grid-graf ako i samo ako važi $\Delta(T) \leq 4$.

HIPOTEZA

Označimo sa $A_p(T)$ minimalnu površinu grid grafa u koji se stablo T može savršeno ugraditi. Tada za svako stablo T važi $A(T) = A_p(T)$.

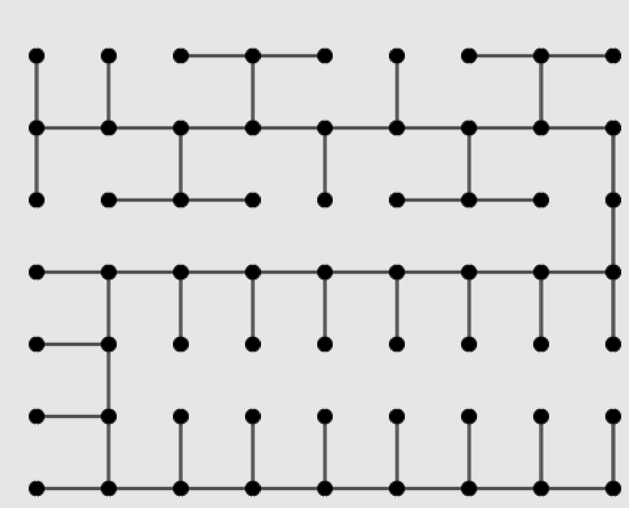
O broju čvorova stepena 2, 3 i 4

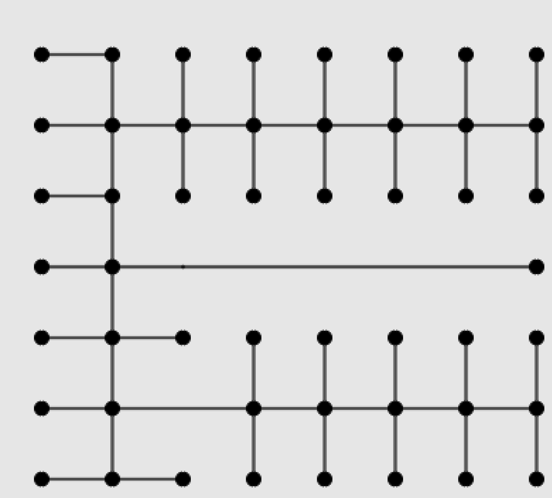
Za $1 \leq i \leq 4$, označimo sa $D_i^{n,m}$ najveći mogući broj čvorova (“raskrsnica”) stepena i koje može sadržati stablo koje se može ugradti u grid graf $G_{n,m}$.

Gornja granica maksimalnog broja listova u lavirintu proizvoljnih dimenzija ($D_1^{n,m}$) je već bila poznata [Li P. C., Michel Toulouse, *Maximum Leaf Spanning Tree Problem for Grid Graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (2010)]. U ovom radu određene su ostale granice.

TEOREMA 4

Neka su n i m prirodni brojevi. Tada za $2 \leq i \leq 3$ važi $D_i^{n,m} \leq \frac{m \cdot n - 2}{i-1}$, pri čemu za $i = 2$ važi jednakost.


Maksimizacija $D_3^{n,m}$


Maksimizacija $D_4^{n,m}$