IS Petnica, seminar MATEMATIKE

Predavanje/igrica

Jun, 2017

Da li je moguće?

– Rešenja zadataka –

1. Nije moguće jedan krug prekriti pomoću dva manja kruga. Pretpostavimo da je dat krug k poluprečnika R i krugovi k_1 i k_2 manjeg poluprečnika, koji ga potpuno prekrivaju. Neka je O centar kruga k, O_1 centar kruga k_1 i neka je AB prečnik kruga k koji je normalan na pravu OO_1. Primetimo da su rastojanja tačaka A i B od tačke O_1 najmanje R, pa se zato ni jedna od ove dve tačke nije prekrivena krugom k_1. To znači da su obe prekrivene krugom k_2, što je nemoguće, jer krug k_2, budući da je njegov poluprečnik manji od R, ne može sadržati dve tačke čije je rastojanje $2R$.

2. Moguće je. Posmatrajmo najpre zbir takvih razlomaka sve do N-tog stepena broja 2, tj. posmatrajmo: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^N}$. Grupišimo sabirke u ovom zbiru na sledeći način:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{N-1}+1}+\frac{1}{2^{N-1}+2}+...+\frac{1}{2^N}\right). \tag{1}$$

Zbirovi koji se nalaze u zagradama su uvek oblika: $\frac{1}{2^{k-1}+1}+...+\frac{1}{2^k}$. Broj sabiraka u ovom zbiru je $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$, a svaki sabirak koji se javlja je veći od poslednjeg sabirka $\frac{1}{2^k}$ (sem samog poslednjeg sabirka). Prema tome, ovakav zbir je veći od $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+...+\frac{1}{2^k}$, gde imamo 2^{k-1} sabiraka, tj. veći od $2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}$. Zaključujemo da su svi zbirovi u zagradama u izrazu (1) veći od $\frac{1}{2}$ i zato je:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^N}\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}=1+\frac{N}{2}.$$

Za $N=2\cdot 2017$, zbir brojeva $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^N}$ je dakle veći od $1+2017$, pa i od 2017.

3. Interesantno je da tačan odgovor na ovo pitanje još uvek nije poznat. Naime, problem određivanja da li je $e+\pi$ (i)racionalan je još uvek otvoren.

4. Moguće je. Poznato je da je $\sqrt{2}$ iracionalan. Posmatrajmo broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ukoliko je taj broj racionalan, pronašli smo primer tražena dva iracionalna broja. U suprotnom, uzmimo $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i $b=\sqrt{2}$. U tom slučaju je $a^b=2$, pa dobijamo dva iracionalna broja a i b takva da je a^b racionalan.

5. Moguće je. Posmatrajmo broj N oblika $N=10^{n_1}+10^{n_2}+...+10^{n_{2017}}$. U dekadnom zapisu broj N u sebi ima 2017 jedinica, a sve ostale cifre su nule. Prema tome, njegov zbir cifara je 2017. Izračunajmo N^2:

$$(10^{n_1}+10^{n_2}+...+10^{n_{2017}})^2=10^{2n_1}+10^{2n_2}+...+10^{2n_{2017}}+2\cdot 10^{n_1+n_2}+2\cdot 10^{n_1+n_3}+...+2\cdot 10^{n_{2016}+n_{2017}}.$$

Ukoliko bi svi brojevi $2n_1, 2n_2, ..., 2n_{2017}, n_1+n_2, n_1+n_3, ..., n_{2016}+n_{2017}$ bili međusobno različiti, broj N^2 bi u svom dekadnom zapisu imao samo cifre 1 i 2. Pritom, zbir tih jedinica i dvojki bio bi upravo jednak ukupnom broju sabiraka na desnoj strani poslednje jednakosti (pri čemu smatramo da $2 \cdot 10^{n_i+n_j}$ zapravo predstavlja dva sabirka), dakle bio bi jednak 2017^2. Da bi rešili problem, dovoljno je naći primer brojeva $n_1, n_2, ..., n_{2017}$ tako da su navedeni zbirovi različiti međusobno. Primera radi, brojevi $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 2^2, n_4 = 2^3, ..., n_{2017} = 2^{2016}$ zadovoljavaju dati uslov. Da bismo to uočili, pretpostavimo recimo da je $n_i + n_j = n_k + n_l$, pri čemu je l najveći indeks među i, j, k, l. Ukoliko je $i = l$ ili $j = l$, zaključujemo da smo sa obe strane zapravo uzeli ista dva broja (recimo $i = l$ i $j = k$). Ukoliko je $i, j \leq l - 1$, onda $n_l = 2 \cdot n_{l-1} \geq n_i + n_j$, pa svakako $n_l + n_k > n_i + n_j$, pa jednakost ne može da važi. Dakle, zaista su svi zbirovi od po dva sabirka među odabranim brojevima međusobno različiti. Prema tome, broj

$$N = 10 + 10^2 + 10^{2^2} + 10^{2^3} + 10^{2^4} + ... + 10^{2^{2016}},$$

zadovoljava traženi uslov.

6. Nije moguće. Najpre, navodimo jedno tvrđenje, a zainteresovani čitalac može pronaći dokaz na ovom linku. U svakoj igri koja ima samo konačno mnogo različitih (mogućih) pozicija i koja se obavezno završava nakon konačno mnogo poteza i to pobedom jednog od dva igrača (nikada se ne završava nerešeno), postoji pobednička strategija ili za prvog ili za drugog igrača.

Dokažimo da u posmatranoj igri prvi igrač, tj. Aca ima pobedničku strategiju. Pošto smo sigurni da pobednička strategija postoji, svaki potez koji Aca može da odigra je pobednički ili za njega ili za Branka. Ukoliko je pisanje broja 2 u prvom potezu pobednički potez za Acu, on odigravši taj potez obezbeđuje sebi pobedu. Ukoliko je pisanje broja 3 na tabli pobednički potez, ponovo Aca obezbeđuje sebi pobedu. I tako redom, ako je pisanje broja 2017 na tabli pobednički potez, ponovo Aca igra taj potez i pobeđuje. Pretpostavimo sada da su svi navedeni potezi gubitnički za Acu. Dakle, ako Aca u prvom potezu napiše na tabli broj $m > 1$, igrač koji zatekne takvu situaciju, tj. Branko, sigurno pobeđuje. Dokažimo da je pod tom pretpostavkom potez u kome on piše broj 1 na tabli obavezno pobednički za Acu. Kada Aca u prvom potezu napiše broj 1 na tabli, Branko može u drugom potezu napisati bilo koji broj iz skupa $\{2, 3, ..., 2017\}$. Kada Branko na tabli napiše broj m, Aca zatiče istu situaciju kao što bi Branko zatekao da je Aca u svom prvom potezu napisao broj m (na tabli piše $1, m$, a ne samo m, ali je kolekcija dopustivih brojeva za naredni potez ista u oba slučaja). Po pretpostavci ta situacija je pobednička. Dakle, pisanjem broja 1 na tabli Aca sigurno pobeđuje.

Ovim smo pokazali da je barem jedan od mogućih prvih poteza pobednički za Acu, pa Branko ne može pobediti u ovoj igri. (Obratimo pažnju da nismo *pronašli* strategiju, već smo samo dokazali da postoji.)