IS Petnica, seminar MATEMATIKE

Cepanje

Jun, 2017

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Svaki polinom neparnog stepena sa realnim koeficijentima ima bar jednu realnu nulu.

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Hromatski indeks (granski hromatski broj) kompletnog grafa sa n čvorova jednak je n ukoliko je n neparan, odnosno $n-1$ ukoliko je n paran broj.

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_k$ prirodni brojevi veći od 1 koji su uzajamno prosti po parovima. Tada za svaki izbor celih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_k$ za koje važi $0 \leq a_1 < n_1$, $0 \leq a_2 < n_2$, $\ldots$, $0 \leq a_k < n_k$, postoji jedinstveni ceo broj x takav da je $0 \leq x < n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ i koji pri deljenju sa n_1 daje ostatak a_1, pri deljenju sa n_2 daje ostatak a_2, itd., pri deljenju sa n_k daje ostatak a_k.

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Četvorougao $ABCD$ (sa dijagonalama AC i BD) je tetivan ako i samo ako važi $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|$

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Neka je $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ familija konačnih skupova (koji ne moraju biti disjunktni). Moguće je izabrati međusobno različite elemente $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$ ako i samo ako za svaki podskup $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ skupa S važi $|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geq k$.

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Za svaki prirodan broj n važi: suma kubova prvih n prirodnih brojeva jednaka je kvadratu sume prvih n prirodnih brojeva.

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

IS Petnica, seminar MATEMATIKE

Cepanje

Jun, 2017

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonačijev niz. Tada je $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

IS Petnica, seminar MATEMATIKE

Cepanje

Jun, 2017

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. Neka je P konačan parcijalno uređen skup. Tada je veličina najvećeg antilanca iz P jednaka najmanjem broju lanaca na koje se može razbiti skup P.

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.

Zajedno smo jači

Dokazati sledeću teoremu, a zatim rešiti zadatke.

Teorema. U standardnoj NIM igri za dva igrača dato je n gomila sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ žetona. Tada prvi igrač ima pobedničku strategiju ako i samo ako je vrednost izraza $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ različita od nule (operacija "$\oplus$" predstavlja operaciju "xor").

1. Date su tri koncentrične kružnice sa centrom u O: kružnica k_1 poluprečnika R, kružnica k_2 poluprečnika $2R$ i kružnica k_3 poluprečnika $3R$. Na kružnicama k_1, k_2, k_3 uočene su tačke A, B, C, redom, tako da je trougao ABC jednakostraničan. Pronaći $\angle AOB$.

2. Da li postoji prirodan broj n takav da se broj $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ završava cifrom 7?

3. Da li postoji niz od 2017 uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je svaki deljiv kvadratom prirodnog broja većeg od 1?

4. Standardni špil karata podeljen je u 13 grupa od po 4 karte na proizvoljan način. Dokazati da se iz svake grupe može odabrati po jedna karta tako da se ukupno dobije jedan as, jedna dvojka, jedna trojka, itd. jedan kralj.

5. Na šahovskom turniru učestvuje 2017 šahista. Potrebno je da svako sa svakim odigra po jednu partiju, ali u jednom danu jedan šahista može odigrati najviše jednu partiju (u toku dana se može igrati nekoliko partija paralelno). Koliko najmanje dana mora da traje ovakav turnir?

6. Aca i Branko igraju sledeću igru. Na tabli 2017×2017 koja je linijama podeljena na jedinična polja, obeleženo je polje u preseku 200. vrste i 300. kolone. Aca i Branko naizmenično vuku poteze takve da u jednom potezu trenutnu tablu makazama seku po nekoj vertikalnoj ili horizontalnoj liniji, sa tim što deo table na kome se nalazi označeno polje zadržavaju, a ostatak table odbacuju. Aca igra prvi, a poteze vuku naizmenično. Igrač koji treba da odigra potez onda kada ostane samo označeno polje izgubio je. Ko ima pobedničku strategiju?

7. Aca i Branko igraju sledeću igru. U matrici 3×3 Aca popunjava sva polja realnim brojevima, sem ona 3 koja čine glavnu dijagonalu. Nakon toga, Branko popunjava tri preostala polja. Ukoliko je determinanta dobijene matrice jednaka nuli, pobednik je Branko, u suprotnom je pobednik Aca. Ko ima pobedničku strategiju?

8. Dato je 10 intervala na realnoj pravoj, tako da kako god da izaberemo 4 od njih, ne postoji tačka koja pripada svima njima istovremeno. Dokazati da možemo da odaberemo 4 od ovih 10 intervala tako da su svaka dva međusobno disjunktna.

9. Niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definisan je sa: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da za svaka dva prirodna broja n i m važi: $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$.