Јесењи семинар Петница 2006. године предавач: Александар Илић

Хајде да се играмо

Симетрија

1. На кругу је дато $n \geq 4$ тачака нумерисаних бројевима $1, 2, \ldots, n$ редом у једном од смерова. Играчи A и B играју игру у којој наизменично спајају тетивама по две тачке које су нумерисане бројевима исте парности, али тако да нацртане тетиве немају заједничких тачака (ни крајеви не смеју бити заједнички). Игру почиње играч А, а побеђује онај од играча који последњи нацрта тетиву. Који играч има победничку стратегију и како?

2. На папиру на квадратиће означено је 100 тачака - темена квадратића који образују квадрат 9×9. Два играча наизменично спајају вертикалним или хоризонталним дужима две суседне означене тачке. Играч после чијег потеза се образује квадратић 1×1 боји тај квадратић својом бојом. Побеђује играч који обоји више квадратића. Који играч има победничку стратегију?

3. Играчи A и B наизменично постављају ловце на на слободна поља шаховске табле - A поставља беле ловце, док B поставља црне. Ловац се не сме поставити ако је на удару противничког ловца (супротне боје); играч који је потезу може поставити свог ловца на поље било које боје. Губитник је онај играч који не може повући потез. Ко побеђује?

Изгубљене и добијене позиције

1. На гомили се налази n жетона. Два играча A и B играју игру у којој наизменично повлаче по 5, 7 или 11 жетона са гомиле. Губи играч који не може да повуче потез. Који играч има победничку стратегију, ако је $n = 2001$, а који ако је $n = 5000$?

2. Два играча A и B узимају бомбоне један за другим са гомиле, на којој се на почетку налазило n бомбона. Дозвољен потез је узети једну или било који прост број бомбона са гомиле, тј. $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$. Победник је онај играч који узме последњу бомбону. Одредити победничку стратегију играча у зависности од n.

3. Дата је табла 1×2000. Играчи A и B уписују наизменично слова S и O у таблу. Победник је онај играч који направи три суседна слова SOS у том редоследу. Доказати да B има победничку стратегију.

4. У почетку је на табли написан број $2004! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2004$. Два играча играју наизменично. Играч који је на потезу од написаног броја одузима неки природан број који је дељив са не више од 20 различитих простих бројева (али тако да разлика буде ненегативна), записује на табли ту разлику, а стари број брише. Побеђује онај играч који добије 0. Који од играча, онај који почиње или његов противник, може себи обезбедити победу и како он треба да игра?

5. Дате су две гомиле са n и m шибица. Дозвољен потез је узети било који број шибица са једне гомиле или по једнак број шибица са обе гомиле. Победник је онај ко узме последњу шибицу. Одредити све парове (n, m) које су губитничке за првог играча.

Крађа стратегије

1. Дат је директан граф са тачно једним највишим и једним најнижим чвором. Играчи A и B наизменично стављају жетоне у чворове графа. Ако је жетон стављен на неки чвор, онда је забрањено стављати жетоне на све чворове испод њега. Играч који стави жетон на највиши чвор је изгубио. Доказати да играч A побеђује.

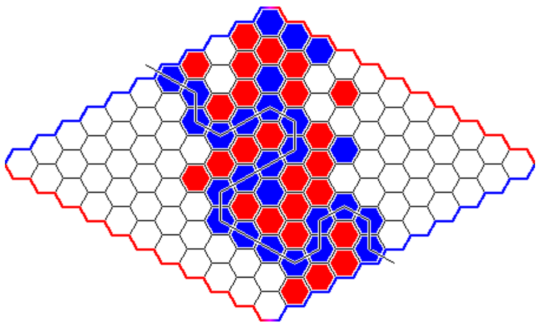
2. На табли је записан број 2. Играч који је на потезу додаје броју на табли произвољан број од 1 до 2005. Први играч који добије број који није прост губи. Доказати да ће се игра завршити и одредити који играч има победничку стратегију.

3. Тома и Сима деле гомилу од 25 новчића са вредностима $1, 2, 3, \ldots, 25$ алтина. При сваком потезу један од њих бира новчић са гомиле, а други говори коме да се да тај новчић. Први бира Тома, а потом онај који има тренутно више алтина; ако имају једнако, онда онај који је бирао прошли пут. Може ли Тома поступати тако да на крају има више алтина од Симе, или пак, Сима може увек у томе спречити Тому и на крају имати више алтина од Томе?

Игра HEX

1. Два играча играју игру на шестоугаоној табли. Сваки од играча има своју боју,рецимо црвену и црну. Играју наизменично, тако што боје шестоугао својом бојом. Црвеном играчу је циљ да формира црвени пут који повезује горњу и доњу страну паралелограма, а плави жели да споји леву и десну страну табле. Доказати да се игра Хекс не може завршити нерешено.

2. Доказати да у игри Хекс први играч има победничку стратегију.



Игра НИМ

1. На столу се налази неколико гомила жетона. Два играча наизменично узимају жетоне са стола. Једним потезом може се са тачно једне гомиле узети неколико зетона (бар један, а могуће и сви). Победник је играч који уклони и последњи жетон са стола.

2. Неколико топова је постављено на разним пољима шаховске табле. Једним потезом се један од топова може померити за произвољан број поља навише или надесно. Дозвољено је да се више топова нађе на истом пољу истовремено. Циљ игре је да се сви топови нађу у левом доњем углу. Утврдити који играч има победничку стратегију.

3. Имамо 5 ћупова који су узначени бројевима од 0 до 4. Ћуп означен бројем 0 је празан на почетку, док се у сваком од осталих ћупова налази известан број златника. Два играча наизменично премештају златнике - дозвољено је преместити произвољан број златника (бар један) из било ког ћупа у ћуп са редним бројем мањим за један. Играч после чијег потеза се сви златници нађу у ћупу означцхеном бројем 0, добија све златнике. Ко је срећни добитник?

Игра у петнаест

1. На квадратној табли 4×4 постављено је 15 квадратних плочица димензије 1×1, које су нумерисане бројевима $1, 2, 3, \ldots 15$. Једно поље је остало слободно. Дозвољено је премештање квадратних плочица тако што се у сваком потезу на слободно поље премести плочица са суседнох поља (два суседна су суседна ако имају заједничку страницу). Сваки распоред плочица на табли називамо позицијом. Да ли је могуће полазећи од позиције лево добити позицију десно?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

2. Коцка $3 \times 3 \times 3$ је издељена на 27 подударних јединичних коцкастих ћелија. Једна од тих ћелија је празна, а остале су попуњене јединичним коцкама које су на произвољан начин означене бројевима $1, 2, \ldots, 26$. Допуштен потез се састоји у премештању једне јединичне коцке у њој суседну празну ћелију. Да ли постоји коначан низ допуштених потеза после чега це јединична коцка означена са k и она означена са $27 - k$ заменити места, за свако $k = 1, 2, \ldots, 13$? Две ћелије су суседне ако имају једну заједничку страну.

Шаховски проблеми

1. Краљ стоји у горњем десном углу шаховске табле 8×8. Једним потезом он се може преместити за једно поље улево, за једно поље надоле или за једно поље по дијагонали улево – надоле. Победник је играч који постави краља у доњи леви угао табле. Ко побеђује у оваквој игри?

2. Играч A поставља скакача на шаховску таблу 8×8. Затим играч B одигра један потез (у складу са правилима шаха), па А одигра један потез, али не сме да постави скакача на поље на ком је већ био, итд. Губи играч који нема на располагању потез. Ко побеђује?

3. На шаховској табли се налази 32 беле фигуре и 32 црне фигуре. У једном потезу играч може за промени боју свим фигурама у реду или колони. Да ли играц може у коначно много потеза да оставити на табли тачно једну црну фигуру?

Игре са бројевима

1. Дато је $2n$ карата, обележених бројевима од 1 до $2n$. Играчи A и B играју следећу игру: карте се промешају и свако добије по n карата. Наизменично избацују по једну карту на сто. Игра се завршава ако је сума бројева на избаченим картама дељива са $2n + 1$. Последња особа која је избацила карту је победник. Ако A и B играју оптималном стратегијом, која је вероватноћа да први играч победи?

2. Два играча играју следећу игру: Први играч записује једну цифру, затим други играч дописује цифру са леве или десне стране, затим први дописује цифру са леве или десне стране итд. Доказати да први може играти тако да никад после потеза другог играча број није потпун квадрат.

3. На табли је написано $n \geq 12$ узастопних природних бројева. Два играча наизменично бришу по један број док не остану два броја. Први побеђује ако су та два броја узајамно проста, а други ако нису. Који играч има победничку стратегију?

4. Борис има 1000 карата нумерисаних са $2, 4, \ldots, 2000$, док Ана има 1001 карата нумерисаних са $1, 3, \ldots, 2001$. Игра траје 1000 рунди. У свакој непарној рунди Борис игра једну његову карту. Ана погледа карту и баци једну своју. Играч који има већу карту добија рунду и обе карте се одбацују. У парним рундама игра се исто, с тим шо је на потезу Ана. На крају игре, Ана одбацује њену неупотребљену карту. Који је максималан број рунди који сваки играч може да освоји, без обзира како играо његов противник?

Игре за једног играча

1. На бесконачној шаховској табли се игра следећа игра са жетонима. На почетку је постављено n^2 жетона у облику квадрата странице n. Једини дозвољени потез је скок преко поља где се налази жетон на слободно поље, а жетон преко кога је прескочен се склања са табле. Одредити све n за које се игра завршава са једним жетоном на табли.

2. На табли димензија $m \times n$ се налазе жетони, који су са једне стране бели, а са друге црни. На почетку се на сваком пљу налази бели жетон, осим у једном углу где се налази црни жетон. У једном потезу играч склања жетон са окренутом црном страном, али онда мора да обрне све жетоне који деле заједничку страницу са пољем где се налазио уклоњени жетон. Одредити све парове (m, n) природних бројева, такви да се сви жетони могу уклонити са табле.

3. Дато је 2006 кутија, које садрже редом $1, 2, 3, \ldots, 2006$ лоптица. У једном потезу је дозвољено одабрати неке кутије и одузети из сваке кутије једнак број лоптица. Који је минимални број потеза потребних да се све кутије испразне?

4. У сваком пољу таблице $n \times n$ се налази сијалица. На почетку су све сијалице угашене. Ако пипнемо неку сијалицу, све сијалице у истом реду и колони мењају стање (оне упаљене се угасе и обрнуто). Одредити минималан број пипања, тако да упалимо све сијалице.

Разне игре

1. Дат је троугао ABC површине 1. Први играч бира тачку на X на AB, затим други бира тачку Y на BC и на крају први играч бира тачку Z на дужи AC. Циљ првог играча је да максимизира површину троугла XYZ. Која је највећа површина коју може да освоји, независно од потеза играча Б?

2. Дато је 9 карата на столу, нумерисаних од 1 до 9. Два играча наизменично повлаче потезе. Победник је онај ко има три карте, које у суми дају 15. Да ли неко од играча има победничку стратегију?

3. Мађионичар и његов помоћник изводе трик. Мађионичар изађе из просторије, док његов помоћник преда публици шпил од 52 карте, од којих они извуку 5. Помоћник узима тих пет карата и бира једну од њих. Ставља је у џеп, а остале четири постави на сто (у неком распореду). Након тога помоћник излази, а мађионичар улази у собу. Он погледа ове 4 карте и каже која је карта остала код помоћника у џепу. Какву стратегију имају мађионичар и његов помоћник ако све карте морају бити окренуте лицем на горе?

4. Једнакостраничан троугао је подељен на n^2 подударних једнакостраничних троуглова. Паук се налази у неком чвору добијене мреже, а мува у другом. Наизменично се крећу у суседни чвор. Доказати да ће паук ухватити муву.

5. Дат је полином $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x + 1$. Два играча играју следећу игру: први замењује једну од звездица реалним бројем, други чини исто са једном од преосталих звездица, итд.

све док не замене све звездице. Ако добијени полином има реалних корена други играч побеђује, а ако нема први. Да ли постоји стратегија којом други добија?

6. На располагању је штап дужине n. Два играча наизменично ломе штап на два дела целобројних различитих дужина. Игра се завршава када су сви делови дужине 1 или 2. Ако на крају има више штапова дужине 1, онда играч који је задњи ломио побеђује. Ако на крају има више стапова дужине 2, онда играч који је задњи ломио губи. Ако их има једнако тада је игра нерешена. Одредити резултат игре у зависности од n.

7. Нека су p и q узајамно прости непарни бројеви. На гомили се налази $N = p^n q^m$ жетона, за неке природне бројеве n и m. Играчи A и B играју следећу игру: На почетку играч A дели гомилу на p или q једнаких делова (по сопственом избору). Затим B дели било коју од добијених гомила на p или q једнаких делова. Они настављају дељење, све док постоји гомила која се може поделити на p или q делова. Играч који на располагању нема потез, губи. Доказати да резултат игре не зависи од начина како играју A и B.

8. Алиса и Боб играју игру на табли 6×6. У једном потезу играч уписује рационалан број, који се не налази на табли, у неко поље. Када се сва поља попуне бројевима, онда се у свакој врсти обоји црно поље са највећим бројем. Алиса побеђује ако може да повуче криву која почиње са горње ивице и завршава у доњу ивицу табле, тако да цела остаје у црним квадратима; Боб у супортном. Наћи победничку стратегију за неког од играча.

9. Двојица везиста играју следећу игру. Дато је n телефонских чворишта и везисти наизменично спајају каблом два од њих по свом избору. Игру добија онај, после чијег потеза се са произвољног чворишта може успоставити веза са произвољним другим чвором (ако треба и са неколико преседања). Ко има победничку стратегију?

10. Уз планину води 1001 степеник. На некима од њих се налази по један камен. Сизиф узима један камен и преноси га узбрдо на први слободан степеник (на следећи, ако је слободан, односно неколико степеника навиш до првог слободног). После тога Ад премешта један камен за једну степеницу надоле, ако је непосредно испод тог камена слободан степеник. На почетку је на сваком од првих 500 степеника по један камен. Циљ Сизифа је да изнесе један камен на врх (на последњи степеник). Да ли га Ад може спречити у томе?

11. Човек се налази у кругу, док се на ободу круга налази тигар који може да се креће само по кружници. Тигар трчи највише четири пута брже од човека. Да ли човек може да побегне из затвореног круга, а да га тигар при томе не поједе?

12. На столу је дато 100 новчића, од којих су 10 окренутих главом нагоре, а 90 писмом нагоре. Вама се стављају рукавице на руке и капа преко главе. Задатак је да поделите новчиће у две групе, које не морају да буду једнаке, али тако да се у обе групе налази исти број писама. Новчиће је дозвољено окретати. Како ћете ово да изведете?

13. Два свештеника се налазе на супротним крајевима планине и треба да се сретну. Полазне тачке су у нивоу мора, а они желе да све време остају на истој надморској висини, чак због тога и да иду уназад. Планина је представљена као на слици, где нема долина које су испод нивоа мора.