IS Petnica, Letnji seminar MAT 2

Predavanje, Marko Đikić

Prečica preko polja

1. Ako je $(G,\cdot)$ konačna grupa, i $a\in G$ proizvoljan element grupe, dokazati da se u nizu $a, a^2, a^3, ..., a^n, ...$ obavezno pojavljuje jedinični element grupe.

2. Dokazati **Lagranžovu teoremu**: ako je $(G,\cdot)$ konačna grupa i $a\in G$ proizvoljan element, tada red elementa a deli ukupan broj elemenata grupe G.

3. Ako je $(G,\cdot)$ konačna grupa, $a\in G$ i $a^m=e$, dokazati da red elementa a deli e.

4. Dokazati da je $(\mathbb{Z}_p,\cdot_p)$ grupa.

5. Neka je p prost broj i d delilac broja $p-1$. Broj brojeva iz skupa $\{1,2,...,p-1\}$ za koje je d poredak po modulu p je tačno $\varphi(d)$. Specijalno, broj primitivnih korena po modulu p jednak je $\varphi(p-1)$. Dokazati.

6. Ako je d ceo broj koji nije potpun kvadrat, tada je skup $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]=\{a+b\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ sa operacijama standardnog sabiranja i množenja (u opštem slučaju kompleksnih brojeva) prsten.

7. Dokazati da je $(\mathbb{Z}_p,+_p,\cdot_p)$ polje.

8. Neka je $p>3$ prost broj. Dokazati da je brojilac razlomka $\frac{a}{b}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}$ deljiv brojem p.

9. Neka je $p>3$ prost broj. Dokazati da je broj $2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$ deljiv sa p.

10. Pokazati Ojlerov kriterijum: $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv_p\left(\frac{a}{p}\right)$.

11. Neka je $(F,+_F,\cdot_F)$ polje, gde je $a\in F$ takav element da jednačina $x^2-a=0$ nema rešenja. Dokazati da je struktura $(F^2,+_{F^2},\cdot_{F^2})$ na kojoj su operacije definisane sa: $(x,y)+_{F^2}(u,v)=(x+_F u, y+_F v)$ i $(x,y)\cdot_{F^2}(u,v)=(x\cdot_F u+y\cdot_F v\cdot_F a, x\cdot_F v+y\cdot_F u)$ polje.

12. Neka je p neparan prost broj i $m\in\{1,2,3,...,p-1\}$. Koliki ostatak daje broj $(1^2+m)(2^2+m)...((p-1)^2+m)$ pri deljenju sa p?

13. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonačijev niz: $f_1=f_2=1$ i $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, za svako $n\in\mathbb{N}$. Ako je $p>5$ prost broj, dokazati da $p|f_{p^2-1}$.

14. Neka je $p\geq 5$ prost broj i R broj načina da se postavi p žetona na polja table $p\times p$, ali tako da ne budu svi žetoni u istoj vrsti (dozvoljeno je da budu svi u istoj koloni). Dokazati da $p^5|R$.

15. Neka je $p\geq 5$ prost broj. Dokazati da $p^3|\binom{2p}{p}-2$.

16. Niz $x_1,x_2,...$ definisan je sa $x_1=2, x_2=12, x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n$, za svako $n\in\mathbb{N}$. Neka je p neparan prost broj, a q prost delilac broja x_p. Dokazati da, ako je $q\neq 2,3$, tada je $q\geq 2p-1$.

17. Niz $a_0,a_1,a_2,...$ definisan je na sledeći način: $a_0=2$ i $a_{k+1}=2a_k^2-1$, za $k\in\mathbb{N}$. Ako je p neparan prost broj takav da $p|a_n$, dokazati da je onda $p\equiv_{2^{n+2}}1$ ili $p\equiv_{2^{n+2}}-1$.