IS Petnica, seminar MATEMATIKE

- Predavanje -

Novembar, 2016

Problemi sa celobrojnom rešetkom

1. U svakoj tački celobrojne rešetke u ravni nalazi se po jedan čovek. Čovek A vidi čoveka B ukoliko se na duži AB ne nalazi ni jedan drugi čovek.

a) Kako odrediti da li se ljudi koji stoje u tačkama sa koordinatama (a, b) i (c, d) međusobno vide?

b) Kako odrediti broj ljudi koji stoji "između" onih koji stoje u tačkama sa koordinatama (a, b) i (c, d)?

c) Da li je moguće odabrati četiri čoveka koji stoje u temenima jediničnog kvadrata, tako da ni jedan od njih ne vidi čoveka koji stoji u koordinatnom početku?

Pikova teorema. Površina (ne obavezno konveksnog, ali bez samopresecanja) mnogougla $\mathcal{S}$ *sa temenima u celobrojnoj rešetki* jednaka je:

$$P_S = I + \frac{1}{2}B - 1,$$

gde je I broj celobrojnih tačaka u unutrašnjosti mnogougla $\mathcal{S}$, a B broj celobrojnih tačaka na njegovom rubu.

2. Odrediti površinu mnogougla sa temenima u tačkama čije su koordinate $(1.5, 3\frac{1}{4})$, $(3\frac{1}{2}, 2.25)$, $(4.5, 4.25)$, $(1, -1)$. (ne baš, jer ima previše da se računa, ali, ono, kako bi ovo sa Pikovom teoremom?)

3. Za koje prirodne brojeve n postoji jednakoivični n-tougao (koji ne mora biti konveksan) sa temenima u celobrojnoj rešetki?

4. Za koje prirodne brojeve n postoji pravilan n-tougao sa temenima u celobrojnoj rešetki?

Zadaci za domaći

1. Postavka kao u prvom zadatku. Dokazati da možemo odabrati 2016×2016 celobrojnih tačaka raspoređenih u obliku kvadrata čije su stranice paralelne koordinatnim osama, tako da ni jedan od ljudi koji stoje u tim tačkama ne vidi čoveka koji stoji u koordinatnom početku.
2. Pokazati da u koordinatnoj ravni postoji krug koji u svojoj unutrašnjosti sadrži tačno 2016 tačaka.
3. Oko svake celobrojne tačke opisan je krug poluprečnika $1/2016$. Dokazati da postoji jednakostranična trougao u toj ravni čija su temena unutar navedenih krugova.