Od zakona poluge do fer podele sedviča
-priča o centru mase-

Srđan Vukmirović

Petnica, mart 2019.

Tekst koji sledi je preuzet iz knjige [1] na koju upućujemo zainteresovanog čitaoca. Samo predavanje ne prati u potpunosti ovaj tekst (recimo, u tekstu se ne pominju "sendviči"...). Napominjemo da smo svesno izbegli upotrebu momenta sile kojim bi objasnila fizička manifestacija centra mase.

1 Težište sistema od dve i tri tačke

Krenimo od klasičnog problema čije je rešenje, tzv. **zakon poluge**, bilo poznato još Arhimedu. Bez želje da ulazimo u formulaciju zakona poluge, počnimo primerom.

Na krajevima klackalice, u tačkama A i B nalaze se mase od 2 i 5 kg, redom. U koju tačku T klackalice treba postaviti oslonac da bi klackalica bila u ravnoteži?

Treba izdeliti klackalicu na $2 + 5 = 7$ jednakih delova i postaviti oslonac u tačku T takvu da je $|AT| : |TB| = 5 : 2$, dakle onoliko bliže tački B koliko je puta u njoj veća masa. U opštem slučaju, neka su u tačkama A i B mase m_1 i m_2, $m_1, m_2 \neq 0$, što ćemo označavati sa $A(m_1)$, $B(m_2)$. Tada oslonac mora da je u tački T za koju važi $|AT| : |TB| = m_2 : m_1$. Vektorski to možemo zapisati sa:

$$m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{0}, \tag{1}$$

odnosno reći da se u centru masa T sile poništavaju.

Ako je O proizvoljna tačka, važi:

$$m_1(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}) + m_2(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{0},$$

odakle se lako izračunava vektor položaja tačke T:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right). \tag{2}$$

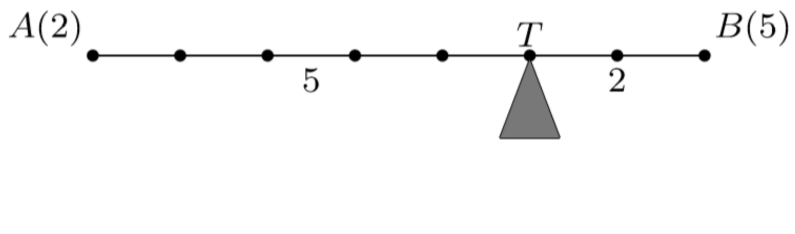
Uzećemo da je formula (1) **definicija centra masa** tačaka $A(m_1)$ i $B(m_2)$.

Primetimo da formule (1) i (2) imaju smisla i ako je neka od masa negativna što pokazuje sledeći primer.

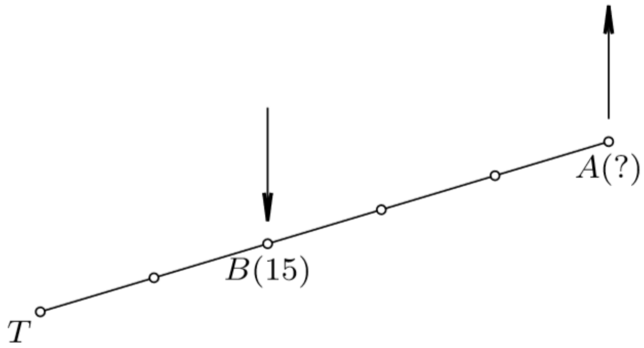
Primer 1 *Jedan kraj poluge dugačke 5 m drži roditelj, a drugi je oslonjen na zemlju. Dete mase 15 kg sedi na 2 m od oslonca (tj. drugog kraja poluge). Koliku masu drži roditelj?*
Rešenje*: Označimo sa A tačku u kojoj se nalazi roditelj, B tačku u kojoj se nalazi dete, a sa T drugi kraj poluge, tj. tačku oslonca. Masa m_2 pridružena tački B je $m_2 = 15$, dok je nepoznata masa m_1 pridružena tački A negativna, zato što roditelj polugu vuče "na gore". Iz formule (1) dobijamo:*

$$\overrightarrow{0} = m_1\overrightarrow{TA} + 15\overrightarrow{TB} = m_1\frac{5}{2}\overrightarrow{TB} + 15\overrightarrow{TB} = (m_1\frac{5}{2} + 15)\overrightarrow{TB}.$$

Pošto je $\overrightarrow{TB} \neq \overrightarrow{0}$ mora biti $m_1\frac{5}{2} + 15 = 0$ pa je $m_1 = -6$. Dakle, roditelj drži masu od 6 kg. ◇



Slika 1: Klasična poluga



Slika 2: Slika uz Primer 1

Ako imamo tri tačke $A(m_1)$, $B(m_2)$, $C(m_3)$ sa odgovarajućim masama centar njihovih masa T je dat sa:

$$\overrightarrow{0} = m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} + m_3\overrightarrow{TC}. \tag{3}$$

Fizički to tumačimo tako što bi trougao ABC napravljen od čvrstog materijala, sa masama skoncentrisanim samo u temenima, stajao u ravnoteži ukoliko je oslonac u tački T. Primetimo da, centar mase pripada trouglu ako i samo ako su mase pozitivne.

Iz relacije (3) se lako izvodi da za proizvoljnu tačku O važi:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right). \tag{4}$$

Neka je $A_1 \in BC$ centar masa tačaka $B(m_2)$ i $C(m_3)$. Tada se duž AA_1 zove **težišna duž** iz temena A. Slično se definišu i težišne duži BB_1 i CC_1.

Teorema 1 *Težišne duži se seku u centru masa.*

Dokaz: Primetimo da formulu (4) možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \tfrac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}\left(\tfrac{m_2}{m_2+m_3}\overrightarrow{OB} + \tfrac{m_3}{m_2+m_3}\overrightarrow{OC}\right)\\ &= \tfrac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA_1},\end{aligned} \tag{5}$$

gde je tačka $A_1 \in BC$ centar masa $B(m_2)$ i $C(m_3)$.

To znači da centar mase T pripada težišnoj duži AA_1. Slično važi za preostale dve težišne duži. □

Primetimo da iz formule (5) sledi da tačka T deli težišnu duž u odnosu $m_1 : (m_2+m_3)$. Zapravo, čitava masa duži BC je skoncentrisana u tački A_1 i iznosi m_2+m_3.

Kada bismo ispod čvrstog modela trougla ABC sa masama postavili linearan oslonac ispod ma koje težišne duži, trougao bi stajao u ravnoteži.

Primedba 1 *Primetimo da je prethodno izlaganje uopštenje pojma težišta trougla. Naime, težište trougla je presek težišnih duži – duži koje spajaju teme trougla sa središtem naspramne ivice. Težište trougla ABC je centar jednakih masa $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$, raspoređenih u temenima trougla. Prema tome, težište trougla ABC je dato formulom:*

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Nije teško uopštiti ove definicije na skup od n tačaka ravni ili prostora što ćemo uraditi u nastavku.

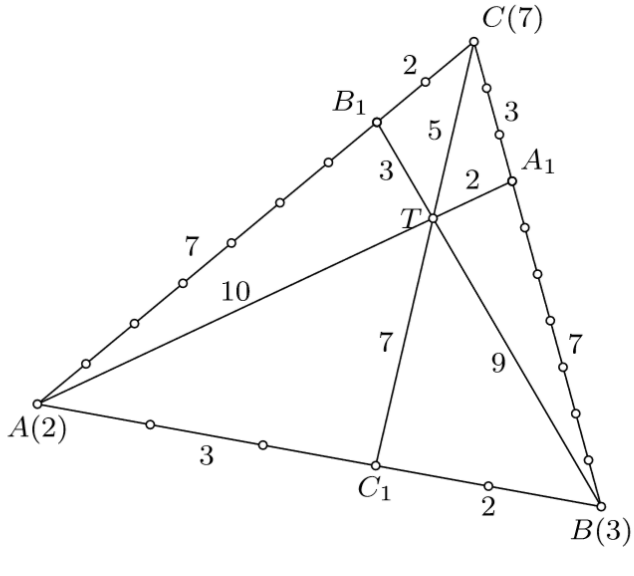
Primer 2 *Date su tačke sa masama $A(2), B(3), C(7)$. Odrediti u kom odnosu centar mase deli težišne duži $\triangle ABC$.*

Rešenje: *Kao u izvođenju (5) dobijamo:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \tfrac{1}{12}(2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 7\overrightarrow{OC}) = \tfrac{2}{12}\overrightarrow{OA} + \tfrac{10}{12}\left(\tfrac{3}{10}\overrightarrow{OB} + \tfrac{7}{10}\overrightarrow{OC}\right)\\ &= \tfrac{2}{12}\overrightarrow{OA} + \tfrac{10}{12}\overrightarrow{OA_1}.\end{aligned}$$

Odatle je jasno da je $|AT| : |TA_1| = 10 : 2 (= (3+7) : 2)$. Na sličan način dobijamo:

$$|BT| : |TB_1| = 9 : 3, \quad |CT| : |TC_1| = 5 : 7.$$



Slika 3: Centar mase tri tačke (Primer 2)

Primer 3 *Dat je trougao* ABC *i na njegovim ivicama tačke* A_1 *i* B_1 *takve da* $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2 : 5$.
(a) Ako je $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, *u kom odnosu tačka* P *deli duži* AA_1 *i* BB_1?
(b) Ako je $\{C_1\} = CP \cap AB$, *u kom odnosu tačka* C_1 *deli duž* AB? ***Rešenje:*** *Stavimo u temena* A, B, C *redom mase* m_1, m_2, m_3 *tako da* AA_1 *i* BB_1 *budu težišne duži. Tada mora da važi:*

$$m_1 : m_3 = 4 : 3, \quad m_2 : m_3 = 5 : 2.$$

Zato je $(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{4}{3}m_3, \frac{5}{2}m_3, m_3\right)$ *gde je masa* $m_3 \neq 0$ *proizvoljna. Uzmemo li* $m_3 = 6$, *dobijamo* $m_1 = 8, m_2 = 15$.
(a) Kao u prethodnom primeru, dobijamo:

$$|AP| : |PA_1| = (6 + 15) : 8 = 21 : 8, \quad |BP| : |PB_1| = (6 + 8) : 15 = 14 : 15.$$

(b) $|AC_1| : |C_1B| = m_2 : m_1 = 15 : 8$. $\diamond$

2 Centar mase sistema n tačaka i centar mase neprekidnog lika

Direktno uopštenje formula (1) i (3) je sledeće.

Ukoliko imamo sistem od n tačaka sa masama $A_1(m_1), \ldots, A_n(m_n)$ centar mase T tog sistema se definiše formulom:

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{TA_i}, \tag{6}$$

odakle se za proizvoljnu tačku O izvodi ekvivalentan uslov (videti Zadatak 1):

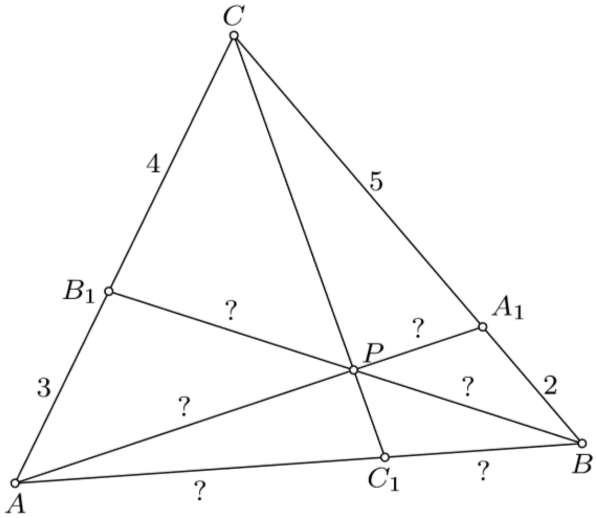
$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}, \tag{7}$$

gde je $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ zbir masa svih tačaka. Može se pokazati da ovakva definicija tačke T ne zavisi od izbora tačke O (videti Zadatak 1).

Ako je O koordinatni početak, a $A_i(x_i, y_i)$ koordinate tačaka, tada su koordinate tačke T:

$$T = \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \right). \tag{8}$$

Slične formule važe u prostoru, samo što tada treba posmatrati i z-koordinatu.



Slika 4: Odredjivanje u kom se odnosu seku duži (Primer 3)

U računarstvu se neprekidni objekti obično diskretizuju, tako da je često dovoljno razmatrati mase na diskretnom skupu tačaka.

Za neprekidne objekte ova se formula može uopštiti tako što se umesto sume koristi integral. Naime, pretpostavimo da je $\rho(\overrightarrow{x})$ funkcija gustine u tački sa koordinatom $\overrightarrow{x}$ lika $\mathcal{F}$ (ravanskog ili prostornog) koji posmatramo. Pretpostavimo da je lik izdeljen na n komadića male zapremine (površine) dV_i, $i = 1, \dots, n$. Tada za neke tačke A_i unutar tih komadića važi da je masa komadića $m_i = \rho(A_i)dV_i$. Iz formule (6) dobijamo da je centar mase lika $\mathcal{F}$ aproksimiran sa:

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n}(\rho(A_i)dV_i)\,\overrightarrow{TA_i}.$$

Prelaskom na limes, kada komadići postaju beskonačno mali, po definiciji integrala dobijamo da za **centar mase neprekidnog lika** $\mathcal{F}$ važi:

$$\overrightarrow{0} = \int\limits_{\mathcal{F}} \rho(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{x} - T)dV,$$

što je uopštenje definicije (6) centra mase.

Ako je ukupna orijentisana masa lika $M = \int\limits_{\mathcal{F}} \rho(\overrightarrow{x})dV$, iz prethodne formule dobijamo da je:

$$T = \frac{1}{M}\int\limits_{\mathcal{F}} \rho(\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{x}\,dV. \tag{9}$$

Naravno, prethodni integrali predstavljaju dva, odnosno tri integrala (u ravni, tj. prostoru) koji su uopštenje formula (8) (videti Primer (4)).

Ako je gustina uniformna, $\rho = const$, tada je $\frac{M}{\rho} = V(\mathcal{F})$ orijentisana zapremina (odnosno površina) lika. Tada prethodna formula postaje:

$$T = \frac{1}{V(\mathcal{F})}\int\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{x}\,dV. \tag{10}$$

U Teoremi koja sledi pominju se "afina preslikavanja". Za strogu definiciju tih preslikavanja pogledati [1]. U ravni (prostoru), možete shvatiti afino preslikavanje kao preslikavanje koje preslikava prave u prave, a odredjeno je time što neki trougao (proizvoljan tetraedar) preslikate u proizvoljan drugi trougao (tetraedar). Takvo preslikavanje čuva paralelnost, odnos u kom tačka deli duž (tj. razmeru). Sa druge strane to preslikavanje ne čuva obavezno, dužine, uglove... Primeri afinih preslikavnja su izometrije (rotacije, refleksije, translacije), homotetija, ali i "rastezanje" (koje recimo slika krug u elipsu).

Teorema 2 *Centar mase neprekidnog lika $\mathcal{F}$ dat formulom (9) je afina invarijanta, odnosno afina preslikavanja čuvaju centar mase.*

To tvrđenje se moglo očekivati. Naime, neprekidna verzija centra mase (9) se dobija prelaskom na integral, tj. kao granična vrednost diskretne definicije centra mase (6), koje je afina invarijanta.

Primer 4 *Centar mase trougla od homogenog materijala se poklapa sa centrom mase istog trougla kome su jednake mase skoncentrisane u temenima, tj. sa težištem trougla.*
Dokaz: *Zbog afine invarijantosti dovoljno je tvrđenje dokazati za trougao $\mathcal{F} = \triangle OAB$, gde je $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, jer je na taj trougao afinim preslikavanjem moguće preslikati svaki trougao. Pošto je površina tog trougla jednaka $\frac{1}{2}$, formula (10) u ravni, gde je $\overrightarrow{x} = (x,y)$, postaje:*

$$T = 2(\int\limits_{\triangle} x\,dx\,dy, \int\limits_{\triangle} y\,dx\,dy). \tag{11}$$

Izračunajmo samo prvi integral, pošto mu je drugi, zbog simetrije koordinata x i y, jednak. Trougao OAB ograničen je dužima:

$$[OA] : y = 0, \;\; x \in [0,1], \quad i \quad [BA] : y = 1-x, \;\; x \in [0,1].$$

Zato je:

$$\int\limits_{\triangle} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} dy \right) x\,dx = \int\limits_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}.$$

Sada iz formule (11) dobijamo da je centar mase $T(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, tj. on se poklapa sa težištem trougla. $\diamond$

Primetimo sledeće:

- Centar mase proizvoljnog homogenog poligona NIJE nužno centar mase njegovih temena sa jednakim masama. Formula za centar mase homogenog poligona dat je formulom (12);

- Centar mase homogenog parelelograma je presek njegovih dijagonala S. Naime, posmatrajmo rotaciju $\mathcal{R}_{S,\pi}$ oko S za ugao π, tj. centralnu simetriju u odnosu na S. Ona čuva paralelogram, pa čuva i njegov centar mase. Jedina tačka koja je fiksna pri rotaciji $\mathcal{R}_{S,\pi}$ je tačka S, pa je to centar mase paralelograma.

  Na sličan način dobijamo da je centar mase homogene elipse njen centar.

- Ako homogeni lik ima osu simetrije tada njegov centar mase pripada toj osi simetrije. Na primer, centar mase homogenog jednakokrakog trapeza pripada pravoj koja je određena središtima osnove i protivosnove.

- Pretpostavimo da je homogen ravan lik $\mathcal{F}$ razbijen na dva lika $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ čije su površine, tj. mase, m_1 i m_2 a centri masa su im T_1 i T_2. Tada je centar mase T lika $\mathcal{F}$ zapravo centar mase sistema tačaka $T_1(m_1), T_2(m_2)$. Ovo važi i za razlaganje na veći broj likova. Pri tome, ako se neki lik odbacuje (predstavlja rupu), onda se on uzima sa negativnom masom.

  Zaista, iz formule (10) vidimo da za centre masa T_1, T_2 važi:

  $$m_1 T_1 = \int\limits_{\mathcal{F}_1} \rho(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}\,dV, \quad m_2 T_2 = \int\limits_{\mathcal{F}_2} \rho(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}\,dV.$$

  Njihovim sabiranjem dobijamo:

  $$m_1T_1 + m_2T_2 = \int\limits_{\mathcal{F}_1} \rho(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}\,dV + \int\limits_{\mathcal{F}_2} \rho(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}\,dV = \int\limits_{\mathcal{F}} \rho(\overrightarrow{x})\overrightarrow{x}\,dV = (m_1+m_2)T,$$

  odakle sledi tvrđenje.

- Neka je $p_n = A_0A_1, \ldots, A_{n-1}$ prost ravanski poligon od homogenog materijala, čije su koordinate temena $A_i(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n-1$ i $A_n = A_0$. Centar mase poligona p_n možemo dobiti tako što poligon $A_0A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = A_0$ razbijemo na n orijentisanih trouglova $\triangle OA_iA_{i+1}$ kao kod računanja površine tog poligona (videti [1]), gde je O koordinatni početak. Težišta i mase tih trouglova su:

  $$T_i = \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{3}, \frac{y_i + y_{i+1}}{3} \right), \qquad m_i = \frac{1}{2}(x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})$$

za $i = 0, \dots, n-1$. Na osnovu dokazanog u prethodnoj tački, centar mase poligona p_n je $T = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{n-1} m_i T_i$, tj.

$$T = \frac{1}{6M}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1})(x_i + x_{i+1}),\ \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1})(y_i + y_{i+1})\right). \tag{12}$$

gde je $M = \sum_{i=0}^{n-1} m_i$ površina, tj. masa poligona.

Primer 5 *(a) Odrediti koordinate težišta T_1 petougla $ABCDE$ napravljenog od homogenog materijala, ako su date koordinate temena $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(12,2)$, $D(6,4)$, $E(0,4)$.*

(b) Odrediti centar mase T lika koji dobija kada se iz petougla $ABCDE$ iseče kvadrat $PQRS$, $P(1,1)$, $Q(3,1)$, $R(3,3)$, $S(1,3)$.

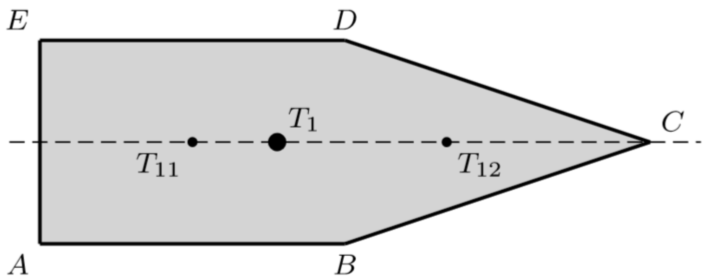
Rešenje:

(a) Da bismo dobili centar mase T_1 razbićemo petougao na pravougaonik $ABDE$ i trougao BCD. Oni imaju površine (mase) $m_{11} = 24$ i $m_{12} = 12$, redom. Centar mase trougla je njegovo težište $T_{12}(8,2)$, a centar mase pravougaonika njegov centar $T_{11} = (3,2)$. Zato je centar mase petougla:

$$T_1 = \frac{1}{36}(24T_{11} + 12Tk_{12}) = \left(\frac{14}{3}, 2\right).$$

Primetimo da centar mase petougla leži na njegovoj osi simetrije, pravoj $y = 2$.

Drugi način da se izračunaju koordinate tačke T_1 je pomoću formule (12) za centar mase poligona. (b)

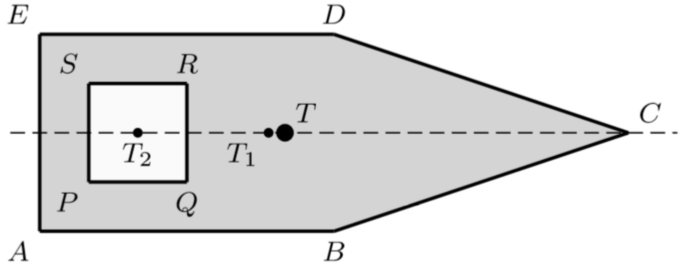


Slika 5: Težište homogenog petougla

Težište mase T_2 homogenog kvadrata ima koordinate $T_2(2,2)$, dok je masa (površina) kvadrata negativna $m_2 = -4$, jer je taj kvadrat isečen. Zato je masa petougla sa isečenim kvadratom $m = 32$, a njegov centar mase je:

$$T = \frac{1}{32}(36T_1 - 4T_2) = (5,2).$$

Primetimo da se nakon isecanja kvadrata, centar mase petougla pomerio "na desno", jer je "levi" deo postao lakši. Primetimo takođe da centar mase novodobijenog lika leži na njegovoj osi simetrije, a to je opet prava $y = 2$. ◇



Slika 6: Težište homogenog petougla sa rupom

Primer 6 ("Prevrtljivi laptop") *Pretpostavimo da je laptop napravljen od homogenog materijala i da je osnova laptopa duplo teža od poklopca. Kako god otvorili poklopac laptopa on će stabilno stajati na stolu. S druge strane, ako laptop oslonimo poklopcem na sto i podižemo osnovu laptopa u jednom momentu laptop će se "preturiti". Koliki je ugao između osnove i poklopca u tom momentu? (U računu zanemariti debljinu osnove i poklopca).*

Rešenje: *Možemo problem razmatrati u ravni normalnoj na osnovu i poklopac laptopa, a koja polovi laptop, pošto se sva težišta nalaze u toj ravni. Neka je r rastojanje težista T_1 poklopca i težišta T_2 osnove do šarke laptopa. U pogodnom koordinatnom sistemu je $T_1(r,0)$, a koordinate težišta osnove, $T_2(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ zavise od ugla α pod kojim je laptop otvoren. Masa poklopca je jednaka m i skoncentrisana u tački T_1, masa osnove duplo veća i skoncentrisana u T_2, tj. važi $T_1(m), T_2(2m)$.*

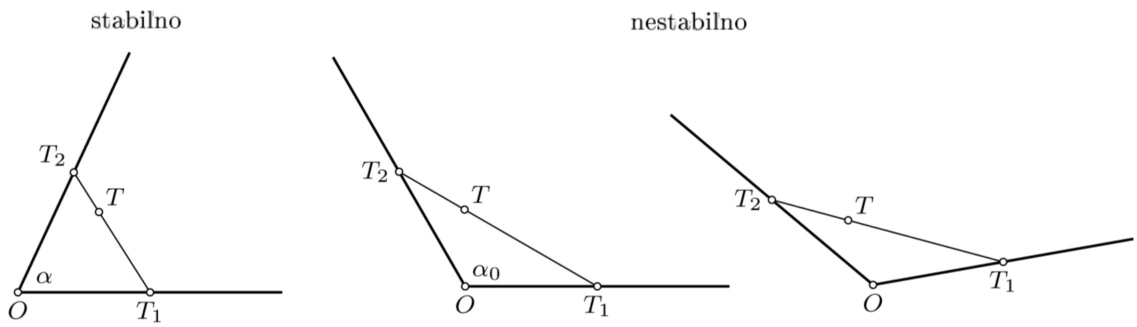
Težište laptopa je tačka $T(\alpha)$ koja zavisi od ugla α:

$$T = \frac{1}{3m}(mT_1 + 2mT_2) = \frac{1}{3}(r + 2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha).$$

Laptop je stabilan sve dok je centar mase T iznad poklopca, pa će se "preturiti" kada je x-koordinata težišta manja ili jednaka od nule, tj. centar mase nije iznad poklopca. Dakle, za kritični ugao $\alpha = \alpha_0$ važi:

$$r + 2r\cos\alpha = 0,$$

odakle je $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Dakle, okrenuti laptop se pretura za $\alpha \geq \frac{2\pi}{3}$. $\diamond$



Slika 7: Nestabilnost laptopa

Primer 7 ("Previs od cigala") *Pretpostavimo da nam je dat dovoljan broj jednakih cigala dužine d. Da li je moguće, slažući cigle (bez lepljenja) jednu na drugu, postići da kraj poslednje složene cigle u projekciji bude udaljen za više od d od kraja prve cigle? Uopštiti!*

Rešenje: *Problem se opet svodi na ravanski. Označimo visinu cigle (iako je nebitna) sa h. Možemo pretpostaviti da cigle imaju masu jednaku 1.*

Neka x-osa ide u pravcu slaganja cigli, a y-osa "u visinu". Cigle ćemo slagati tako što svaku sledeću stavimo ispod prethodno složenih (videti Sliku **??***). Ako smo već stavili k cigli centar mase tih k cigli označićemo sa T_k, $k = 1, 2, 3, \dots$. Težište $(k+1)$-e cigle označimo sa C_{k+1}. Kada stavimo $(k+1)$-u ciglu sistem će ostati u ravnoteži ako projekcija tačke T_k ne pređe ivicu $(k+1)$-e cigle, pa za x-koordinate važi:*

$$C^x_{k+1} = T^x_k + \frac{d}{2}. \tag{13}$$

Težište T_{k+1} dobijamo od težista prvih k cigli T_k, sa masom k i težišta $k+1$ cigle C_{k+1} sa masom 1, a za x-koordinate važi:

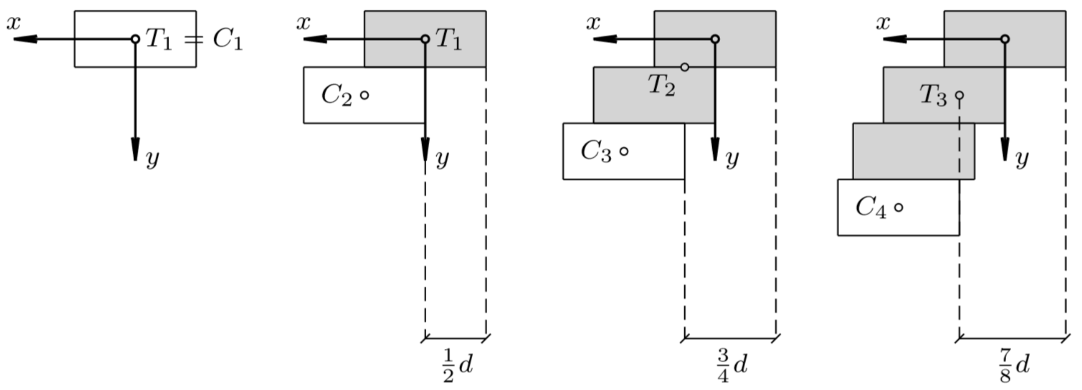
$$T^x_{k+1} = \frac{1}{k+1}(kT^x_k + C^x_{k+1}).$$

Uvrštavanjem pretposlednje jednačine u poslednju dobijamo:

$$T^x_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(kT^x_k + \left(T^x_k + \frac{d}{2}\right)\right) = T^x_k + \frac{1}{2(k+1)}d.$$

Odavde se, korišćenjem formule (13), dobija da za x-koordinate centra cigle važi slična formula:

$$C^x_{k+1} = C^x_k + \frac{1}{2k}d.$$



Slika 8: Previs od cigala

Na taj način možemo izračunati x-koordinate centara cigli (uzimajući $C_1^x = 0$). Na primer:

$$\begin{aligned}
C_2^x &= C_1^x + \frac{d}{2} = \frac{d}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}d,\\
C_3^x &= C_2^x + \frac{1}{2\cdot 2}d = \frac{d}{2\cdot 1} + \frac{d}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}d,\\
C_4^x &= C_3^x + \frac{1}{2\cdot 3}d = \frac{d}{2\cdot 1} + \frac{d}{2\cdot 2} + \frac{d}{2\cdot 3} = \frac{11}{12}d,\\
C_5^x &= C_4^x + \frac{1}{2\cdot 4}d = \frac{d}{2\cdot 1} + \frac{d}{2\cdot 2} + \frac{d}{2\cdot 3} + \frac{d}{2\cdot 4} = \frac{25}{24}d\ldots
\end{aligned}$$

Primetimo da x-koordinata C_k^x centra k-te cigle predstavlja upravo "previs" koji možemo napraviti sa $k-1$ cigli. Pošto je $\frac{25}{24} > 1$ vidimo da već sa 4 cigle možemo da napravimo da previs bude veći od dužine jedne cigle. Ovim smo dali odgovor na postavljeno pitanje. Ipak, koliko veliki previs možemo napraviti? Jasno je da:

$$C_k^x = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m}$$

polovina $(k-1)$-e sume tzv. harmonijskog reda $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$. Dobro je poznato da je taj red divergentan, tj. suma je beskonačna. To znači da možemo da napravimo, naravno samo teorijski, koliko god hoćemo veliki previs, ako upotrebimo dovoljan broj cigli.

Taj red veoma sporo divergira, što se vidi iz sledeće tabele previsa. U tabeli je dat minimalan broj cigala potreban da bi se (teoretski) postigao previs u dužini $1, 2, 3, 4, 5$, odnosno 10 cigala.

k	5	*32*	*228*	*1675*	*12368*	*272400601*
previs C_k^x	$1.041d$	$2.013d$	$3.022d$	$4.002d$	$5.00002d$	$10d$

Ako je visina cigle $6.5cm$, a dužina $d = 25cm$, tada je za previs od $10d = 250$ cm visina previsa $17706km$!

Zadatak 1 *Pokazati da su relacije (6) i (7) ekvivalentne za proizvoljnu tačku O.*

Zadatak 2 *Proveriti rezultate Primera (5) koristeći formulu (12).*

Zadatak 3 *Čekić je napravljen od drvene drške i gvozdene glave. Glava je gvozdeni kvadar dimenzija $5 \times 5 \times 10$ cm sa rupom u za dršku. Drška je drveni kružni cilindar dužine 40 cm i prečnika 3 cm. Ako je gustina gvožđa $8\frac{kg}{dm^3}$, a drveta $0.8\frac{kg}{dm^3}$, odrediti težište čekića.*

Nakon predavanja: Kako to obično biva, na samom predavanju se nisam dotakao podele sedviča (vidi uvod). Dakle, ako dvema osobama delimo sendvič od hleba, šunke i sira na "fer" način, onda svaka osoba treba da dobije jednako hleba, jednako šunke i jednako sira. Pretpostavimo da su ta tri komada (hleb, šunka, sir) negde u prostoru. **Pitanje: Da li možemo jednim rezom noža (tj. jednom ravni) preseći sva tri sastojka na delove jednakih zapremina**. Potvrdan odgovor daju centri mase. Ako postavimo ravan baš kroz centre masa ta tri komada izvršili smo pravilnu podelu!

References

[1] T. Šukilović, S. Vukmirović, *Geometrija za informatičare*, Matematički fakultet, Beograd, 2015.