IS Petnica, seminar MATEMATIKE
Zimski MAT2, 2019
Dušan Dragutinović & Branislav Šobot
Radionica

O metričkim i topološkim prostorima

1 Metrički prostori

Definicija. *Metrički prostor je par* (M, d) *gde je* M *neki neprazan skup, a* $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ *funkcija za koju važi:*

- *(pozitivnost)* $d(x, y) \geq 0$ *i važi* $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$
- *(simetričnost)* $d(x, y) = d(y, x)$
- *(nejednakost trougla)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

za proizvoljne $x, y, z \in M$.

Definicija. *U metričkom prostoru* (M, d) *otvorenom loptom sa centrom* $a \in M$ *i poluprečnikom* $r \in \mathbb{R}$ *nazivamo skup* $B(a, r) := \{x \in M | d(x, a) < r\}$. *Za podskup* $U \subset M$ *metričkog prostora* (M, d) *kažemo da je otvoren ako za svako* $a \in U$ *postoji otvorena lopta* $B(a, r) \subset U$.

1. Pokazati da u svakom metričkom prostoru (M, d) važi $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ za sve $x, y, z \in M$.
2. Neka je G povezan neusmeren graf sa skupom čvorova $V(G)$ i neka je za čvorove x, y sa $d(x, y)$ označena dužina najkraćeg puta između čvorova x i y (tj. minimalan broj grana koje treba preći da bi se stiglo od čvora x do čvora y). Pokazati da je $(V(G), d)$ metrički prostor.
3. Da li je $(\mathbb{R}^2, d)$ metrički prostor, gde je $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$?
4. Da li je $(\mathbb{R}, d)$ metrički prostor, gde je $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$?
5. Hamingovo rastojanje h na skupu $\{0, 1\}^n$ (ovaj skup dakle čine $(1, 0, 1, ..., 1, 1, 1, 0)$ kao i ostali nizovi nula i jedinica dužine n) se definiše kao broj na koliko mesta se nizovi razlikuju (korisno u teoriji kodiranja i detektovanju grešaka pri prenosu podataka). Pokazati da je $(\{0, 1\}^n, h)$ metrički prostor.
6. Neka X bude skup ljudi iste generacije. Definišimo sa $d(x, y)$ udaljenost između osoba x i y kao broj generacija do zajedničkog pretka x i y po muškoj liniji. Na primer, udaljenost između dve rođene sestre je 1, udaljenost između sestre i brata od strica je 2. Pokazati da je (X, d) metrički prostor.
7. Kako izlgedaju otvorene lopte poluprečnika 2 u zadacima $2, 3$ i 5?
8. Pokazati da je skup otvoren ako i samo ako može da se napiše kao unija otvorenih lopti.
9. Pokazati da u metričkom prostoru važi:
   - prazan skup i ceo skup su otvoreni skupovi;
   - unija proizvoljnog broja otvorenih je otvoren skup;
   - presek dva otvorena skupa je otvoren skup (samim tim, i presek konačnog broja otvorenih jeste otvoren)

10. **Neka je p prost broj. Za svako prirodno n definišemo $v_p(n)$ kao stepen broja p u faktorizaciji broja n na proizvod prostih; drugim rečima, $v_p(n) := \max\left\{k| \quad p^k|n\right\}$ (na primer $v_3(270) = 3$). Iz definicije sledi da je $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.

    Za $q = \pm\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definišemo $v_p(q) = v_p(n) - v_p(m)$, a pritom i za racionalne brojeve važi $v_p(qr) = v_p(q) + v_p(r)$. Sa
$$d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto [0, \infty)$$
$$d_p(x, x) := 0, \quad d_p(x, y) := p^{-v_p(x-y)}.$$

    - Pokazati da je d_p metrika na $\mathbb{Q}$, zovemo je $p--$adskom metrikom, tj. da je $(\mathbb{Q}, d_p)$ metrički prostor.
    - Pokazati da ova metrika zadovoljava strožiju nejednakost trougla (ultrametričku nejednakost)
$$d(x, z) \le max\{d(x, y), d(y, z)\}$$
    - Pokazati da ako je $d(x, y) \ne d(y, z)$ onda mora biti
$$d(x, z) = max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$
    - Pokazati da ako dve lopte u takvom prostoru imaju zajedničku tačku, onda je jedna od tih lopti sadržana u drugoj, kao i da je svaka tačka lopte njen centar.

2 Topološki prostori

Definicija. *Neka je X neprazan skup. Za familiju $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ podskupova od X kažemo da je **topologija** na skupu X ako ispunjava sledeće osobine*

(T1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$;

(T2) (zatvorenost za proizvoljne unije) Ako $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}$, onda $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$;

(T3) (zatvorenost za konačne preseke) Ako $\{A_i : 1 \le i \le n\} \subseteq \mathcal{O}$, onda $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O}$.

*U tom slučaju, kaže se i da je par $(X, \mathcal{O})$ **topološki prostor**. Elemente familije $\mathcal{O}$ zovemo **otvoreni skupovi**, dok elemente skupa X zovemo **tačke**.*

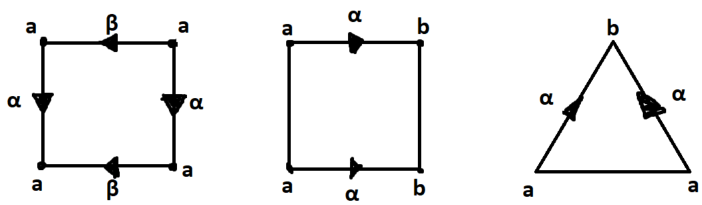
Primer. *Diskretna i antidiskretna na proizvoljnom skupu; Euklidski prostor $\mathbb{R}^3$ i Euklidska ravan $\mathbb{R}^2$ kao topološki prostor sa $\mathcal{O}_{uob}$ topologijom; Dvotačka $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ na skupu $X = \{1, 2\}$; Svakom metričkom prostoru pridružujemo topologiju; Svakom podskupu topološkog prostora dodeljujemo topologiju - npr. $(0, 1)$.*

Definicija. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je **neprekidna** ako za svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}_Y$ važi da $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$. Funkcija $f : X \to Y$ je **homeomorfizam** ako je neprekidna bijekcija čija je inverzna funkcija takođe neprekidna. Ako postoji pomenuti homeomorfizam, onda za prostore X i Y kažemo da su **homeomorfni** i pišemo $X \cong Y$.*

Primer. *$f(x) = 5x$ je neprekidna; funkcija $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_l) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{euk})$ data sa $f(x) = x$ nije neprekidna zbog recimo $(0, 1) \in \mathcal{O}_{euk} \setminus \mathcal{O}_l$ (za definiciju $\mathcal{O}_l$ videti zadatak 5); funkcija $f(x) = \mathrm{tg}\left(\pi(x - \frac{1}{2})\right)$ je homeomorfizam između $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$ sa $\mathcal{O}_{uob}$; Krug i rub kvadrata su homeomorfni; Lopta bez centra i sfera su homeomorfni.*

Primer. *Neka nam je dat topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ i relacija ekvivalencije ρ na skupu X. Tako dobijemo količnički skup X/ρ i neka je $f : X \to X/\rho$ preslikavanje koje svaki elemenat slika u njegovu klasu (tzv.prirodno preslikavanje). Na skupu X/ρ definišemo topologiju $\tau = \{O \subseteq X/\rho : f^{-1}[O] \in \mathcal{O}\}$. Ovo je malko formalije zapisana ideja lepljenja dve strane kvadrata da bi se dobila Mebijsuova traka.*

Naredne dve teoreme važe i u svim ostalim konačnim dimenzijama, ali ih mi navodimo u jednostavnijim oblicima radi bolje intuicije.



Slika 1: torus, cilindar i kupa

Teorema 1. *(Borsuk-Ulam) Neka $\mathbb{S}^2$ označava sferu smeštenu u $\mathbb{R}^3$. Za svako neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ postoji tačka $x \in \mathbb{S}^2$ takva da je $f(x) = f(-x)$. Teorema važi i u*

Teorema 2. *(Brouwer) Neka $\mathbb{B}^3$ označava loptu smeštenu u $\mathbb{R}^3$. Tada za svako neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}^3$ postoji tačka $x \in \mathbb{B}^3$ takva da je $f(x) = x$.*

1. Da li je $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ topologija na skupu $\{1,2,3,4\}$?

2. Koliko ima topologija na troelementnom skupu?

3. Da li familija svih konačnih podskupova nekog nepraznog skupa X čini topologiju na X? Ako ne uvek, kada to čini?

4. Neka je X beskonačan skup i neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija svih podskupova od X čiji je komplement konačan. Dokazati da je $\mathcal{O}$ (tzv. kokonačna) topologija na skupu X.

5. Dokazati da familija $\mathcal{O}_l = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ čini topologiju na skupu $\mathbb{R}$. Ovu topologiju zovemo leva topologija na skupu $\mathbb{R}$.

6. Kažemo da je skup zatvoren u nekom topološkom prostoru ako i samo ako mu je komplement otvoren. Ako je dat topološki prostor $(X, \mathcal{O}_X)$, onda sa $\mathcal{F}_X$ označavamo familiju svih zatvorenih skupova u tom topološkom prostoru. Dokazati da važe:

(Z1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}_X$;

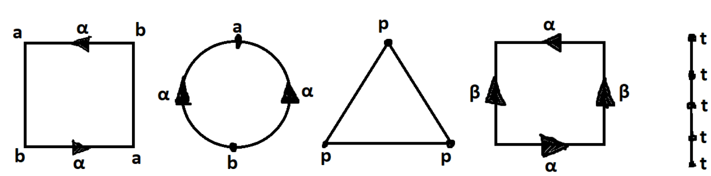
(Z2) (zatvorenost za konačne unije) Ako $\{A_i : 1 \le i \le n\} \subseteq \mathcal{F}_X$, onda $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}_X$;

(Z3) (zatvorenost za proizvoljne preseke) Ako $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}_X$, onda $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}_X$.

7. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Dokazati da je funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna ako i samo ako za svaki zatvoren skup $F \in \mathcal{F}_Y$ važi da $f^{-1}[F] \in \mathcal{F}_X$.

8. Dokazati da je $(0,1) \cong (72,75)$ u skupu realnih brojeva sa Euklidskom topologijom.

9. Kako izgledaju prostori čiji su količnički modeli na slici ispod?



10. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori koji na prirodan način prave topologije $\mathcal{O}_X$ i $\mathcal{O}_Y$. Da li je moguće da su topološki prostori $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ homeomorfni, ali da metrički prostori (X, d_X) i (Y, d_Y) nisu izometrični (ne postoji bijekcija koja čuva rastojanje)?

11. *Dokazati da $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ nisu homeomorfni sa uobičajenom topologijom.

12. Dokazati da u svakom trenutku postoje dve diamtralno suprotne tačke na Zemlji sa istom temperaturom i pritiskom.

13. Dokazati da ako mapu Petnice postavimo bilo gde u Petnici postoji tačka u Petnici koja će se poklopiti sa tačkom na mapi koja je predstavlja.

14. a) Dokazati da familija svih podskupova skupa $\mathbb{Z}$ koji su unije proizvoljno mnogo aritmetičkih nizova čini topologiju na skupu $\mathbb{Z}$. Označimo tu topologiju sa τ.
    b) Dokazati da je svaki skup svih članova nekog aritmetičkog niza zatvoren skup.
    c) Dokazati da je skup $\{-1, 0, 1\}$ otvoren u topologiji τ uz pretpostavku da ima konačno mnogo prostih brojeva.
    d) Dokazati da ima beskonačno mnogo prostih brojeva.