Istrazivačka stanica Petnica
Zimski seminar MAT 1
20. mart 2008 godine

Andreja Ilić
student II godine PMF-a u Nišu
email: ilic_andrejko@yahoo.com

# Prebrojavanje sa stilom
# (zagrevanje za popodne)

## 1 Zadačići za uvežbavanje

**Zadatak 1.** Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko ima funkcija $f : S \to S$ koje nemaju fiksnu tačku?

**Zadatak 2.** Slepi čovek ima hrpu od 10 sivih i 10 crnih čarapa. Koliko čarapa treba da izabere da bi siguran da ima par iste boje? Koliko njih treba da uzmem da bude siguran da ima par sive boje?

**Zadatak 3.** Koliko ima podskupova skupa $A$, pri čemu je $|A| = n$?

**Zadatak 4.** Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ pri čemu su brojevi 1 i 2 susedni? A sta je sa permutacijama u kojima broj 1 stoji iza broja 1?

**Zadatak 5.** Koliko permutacija skupa $\{1, 2, \ldots n\}$ ima samo jedan ciklus?

**Zadatak 6.** Koliko postoje permutacija špila karata od 52 karte u kojima se sva četiri asa nalaze u prvih 10 karata.

**Zadatak 7.** (Uslovna simetričnost)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Zadatak 8.** (Adiciona formula)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

**Zadatak 9.** (Binomna teorema)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Zadatak 10.**

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

## 2 Zadaci

**Zadatak 1.** Dokazati da se medju $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu naći tri broja tako da jedan od njih bude jedna zbiru ostala dva.

**Zadatak 2.** Odrediti broj uredjenih parova $(A, B)$, gde je $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Zadatak 3.** U kutiji se nalaze 36 žutih, 27 plavih, 18 zelenih i 9 crvenih kuglica, pri čemu se kuglice iste boje ne razlikuju medjusobno. Na koliko načina je moguće izabrati 10 kuglica?

**Zadatak 4.**

- Koliko ima $n \times n$ matrica čiji su elementi iz skupa $\{0, 1, \ldots, q-1\}$?
- Neka je $q$ prost broj. Koliko ima matrica iz prvog dela zadatka čija determinanta nije deljiva sa $q$?

**Zadatak 5.** Na koliko načina se $n = n_1 + \ldots n_k$ različitih kuglica može rasporediti u $k$ različitih kutija, tako da je za svako $i$ $(1 \leq i \leq k)$ važi da se u $i$-toj kutiji nalaze $n_i$ kuglica?

**Zadatak 6.** Dokazati binomni identitet:

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

**Zadatak 7.** Dokazati binomni identitet:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

**Zadatak 8.** Izračunati izraz ako je $0 \leq m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{n}$$

**Zadatak 9.** U skupštini ima 30 poslanika. Svaki poslanik je u svadji sa tačno deset drugih poslanika. Na koliko načina se može formirati tročlana komisija tako da su svaka dva člana komisije u svadji ili da nikoja dva nisu u svadji?

**Zadatak 10.** Koliko ima matrica dimenzija $n \times m$ sa elementima $+1$ i $-1$, takvih da je proizvod elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni: a) $+1$; b) $-1$.