Električna kola i nasumične šetnje

Jelena Mrdak

IS Petnica

Prvi problem

$$p(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p(x)$$

$$p(x) = \frac{2}{3}$$

Pojmovi

Potencijal je funkcija $v : V(G) \to \mathbb{R}^+$.
$v(uzemljenje) = 0$
$v(izvor) = 1$

Napon između dve tačke x i y je razlika njihovih električnih potencijala.
$U_{xy} = v(x) - v(y)$

Struja je funkcija $i : E(G)^+ \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uslov

$$(x, y) \in E(G)^+, i_{xy} = -i_{yx}.$$

Otpor je funkcija $R : E(G) \to \mathbb{R}^+$.
Otpor grane $\{x, y\} \in E(G)$ je R_{xy}.

Provodnost grane $\{x, y\}$ je recipročna vrednost otpora te grane.

$$C_{xy} = \frac{1}{R_{xy}}$$

Provodnost čvora x je suma provodnosti grana koje izviru iz njega.

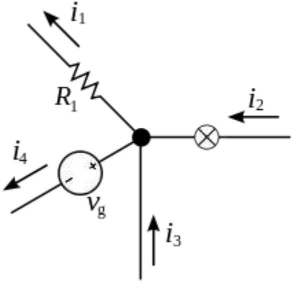
$$C_x = \sum_{y \in N(x)} C_{xy}$$

Omov zakon. Struja duž grane $\{x, y\}$ u smeru (x, y), i_{xy}, zadovoljava sledeće:

$$i_{xy} = \frac{v(x)-v(y)}{R_{xy}}$$

Kirhofov zakon. Zbir struja koje ulaze u čvor jednak je zbiru struja koje izlaze iz njega. Ekvivalentno:

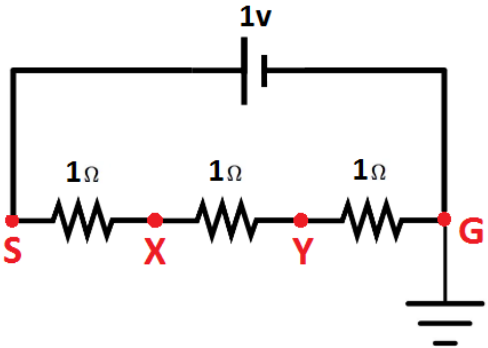
$$\sum_{y \in N(x)} i_{xy} = 0.$$



$$i_3 + i_2 = i_1 + i_4$$

Prvi problem

G je uzemljenje. S je izvor sa potencijalnom razlikom $1v$ u odnosu na uzemljenje. Otpor svake grane je 1Ω. Naći $v(x)$ i $v(y)$.



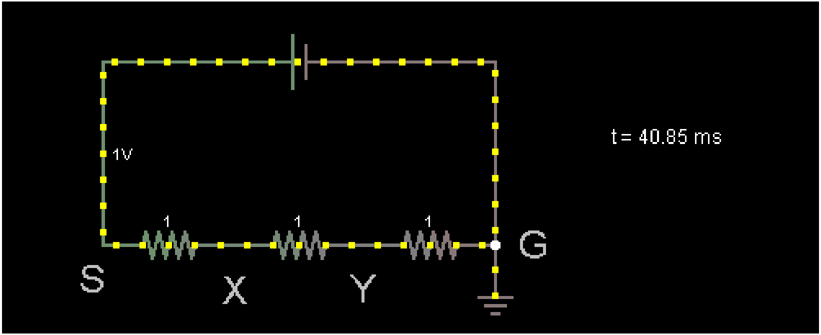
Kirhofov zakon:

$$
\begin{aligned}
0 &= i_{xS} + i_{xy} \\
&= \frac{v(x) - v(S)}{R_{xS}} + \frac{v(x) - v(y)}{R_{xy}} \\
&= v(x) - v(S) + v(x) - v(y)
\end{aligned}
$$

$$v(x) = \frac{v(S)+v(y)}{2}$$

$$v(y) = \frac{v(x)+v(G)}{2}$$

$$v(x) = \frac{2}{3}, v(y) = \frac{1}{3}$$


1V
1
1
1
S
X
Y
G
t= 40.85 ms

Grafovi i električna kola

G je težinski graf i w_{xy} težina grane $\{x, y\}$. Nalazimo se u čvoru x. Nasumično biramo susedni čvor $y \in N(x)$ sa verovatnoćom $\frac{w_{xy}}{w_x}$ i pomeramo se u taj čvor, itd.

S i G su dva različita čvora grafa G.

$p(x)$ je verovatnoća da nasumično šetajući iz čvora x dodjemo u S, a da nijednom nismo bili u G.

Teorema. $p(x) = v(x)$, ako pretvorimo graf G u električno kolo, gde je:

- G uzemljenje,
- napon između S i G $1v$,
- svaka grana $\{x, y\}$ grafa G zamenjena otpornikom provodnosti w_{xy}.

Dokaz.

- Početni uslovi su isti
- $p(x)$ i $v(x)$ su rešenja istog sistema linearnih jednačina S
- S ima jedinstveno rešenje
  - Maksimalna i minimalna vrednost funkcije p je u graničnim tačkama (S i G)
  - Postoji jedinstveno rešenje sistema

- $p(x)$ i $v(x)$ su rešenja istog sistema linearnih j-na

$$0 = \sum_{y \in N(x)} \frac{v(x) - v(y)}{R_{xy}} = v(x) \cdot \left(\sum_{y \in N(x)} \frac{1}{R_{xy}} \right) - \sum_{y \in N(x)} \frac{v(y)}{R_{xy}}$$

$$v(x) \cdot \left(\sum_{y \in N(x)} \frac{1}{R_{xy}} \right) = \sum_{y \in N(x)} \frac{v(y)}{R_{xy}}$$

$$v(x) C_x = \sum_{y \in N(x)} C_{xy} v(y)$$

$$v(x) = \sum_{y \in N(x)} \frac{C_{xy}}{C_x} v(y)$$

$$p(x) = \sum_{y \in N(x)} \frac{w_{xy}}{w_x} p(y)$$

• Maksimalna i minimalna vrednost funkcije p je u graničnim tačkama

$p(x)$ je maksimum i x je unutrašnja tačka.

$$p(x) = \sum_{y \in N(x)} \frac{w_{xy}}{w_x} p(y) \leq \sum_{y \in N(x)} \frac{w_{xy}}{w_x} p(x) = p(x)$$

$p(x) = p(y)$

p je konstantna funkcija.

Ako je $p(S) = p(G)$, tada je
$p(S) = p(x_1) = \cdots = p(x_n) = p(G)$.

Ako je $p(S) \neq p(G)$, tada su oni maksimum i minimum.

- Postoji jedinstveno rešenje sistema

$$p(x_1) =$$
$$\frac{w_{x_1 S}}{w_{x_1}} p(S) + \frac{w_{x_1 x_2}}{w_{x_1}} p(x_2) + \cdots + \frac{w_{x_1 x_n}}{w_{x_1}} p(x_n) + \frac{w_{x_1 G}}{w_{x_1}} p(G)$$

$$p(x_2) =$$
$$\frac{w_{x_2 S}}{w_{x_2}} p(S) + \frac{w_{x_2 x_1}}{w_{x_2}} p(x_1) + \cdots + \frac{w_{x_2 x_n}}{w_{x_2}} p(x_n) + \frac{w_{x_2 G}}{w_{x_2}} p(G)$$

$$p(x_n) =$$
$$\frac{w_{x_n S}}{w_{x_n}} p(S) + \frac{w_{x_n x_1}}{w_{x_n}} p(x_1) + \cdots + \frac{w_{x_n x_{n-1}}}{w_{x_{n-1}}} p(x_{n-1}) + \frac{w_{x_n G}}{w_{x_n}} p(G)$$

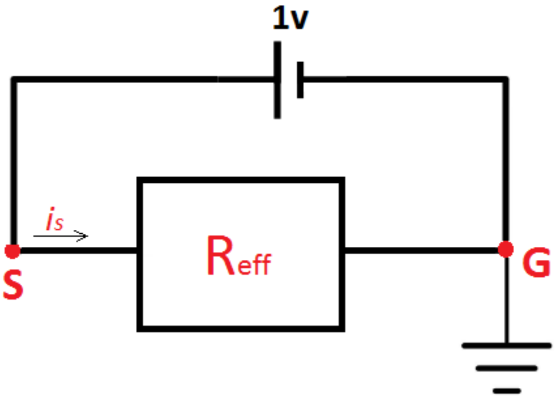
gde je $w_{ij} = 0$ ako ne postoji grana između i i j

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{w_{x_1x_2}}{x_{x_1}} & \cdot & \cdot & -\frac{w_{x_1x_n}}{x_{x_1}} \\ -\frac{w_{x_2x_1}}{x_{x_2}} & 1 & \cdot & \cdot & -\frac{w_{x_2x_n}}{x_{x_2}} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ -\frac{w_{x_nx_1}}{x_{x_n}} & -\frac{w_{x_nx_2}}{x_{x_n}} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_{x_1S}}{w_{x_1}} p(S) + \frac{w_{x_1G}}{w_{x_1}} p(G) \\ \frac{w_{x_2S}}{w_{x_2}} p(S) + \frac{w_{x_2G}}{w_{x_2}} p(G) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{w_{x_nS}}{w_{x_n}} p(S) + \frac{w_{x_nG}}{w_{x_n}} p(G) \end{bmatrix}$$

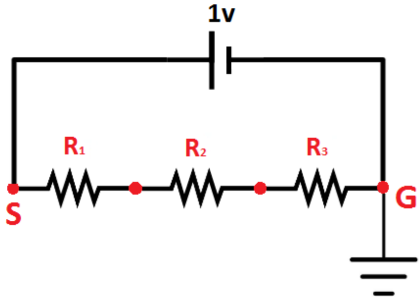
Za $p(S) = p(G) = 0$, rešenje je 0 vektor i ono je jedinstveno $\implies$ matrica sistema je invertibilna.

Zaključak, za $p(S) = 1$ i $p(G) = 0$ postoji jedinstveno rešenje. $\square$

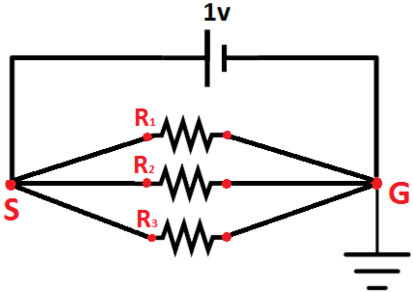
Efektivni otpor



$$R_{eff} = \frac{v(S) - v(G)}{i_S} = \frac{1}{i_S}$$



$$R_{eff} = R_1 + R_2 + R_3$$

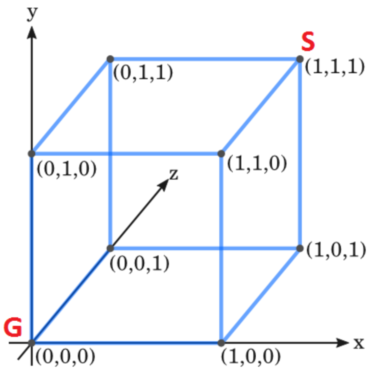


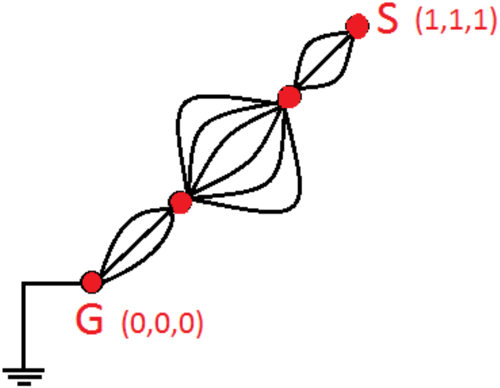
$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

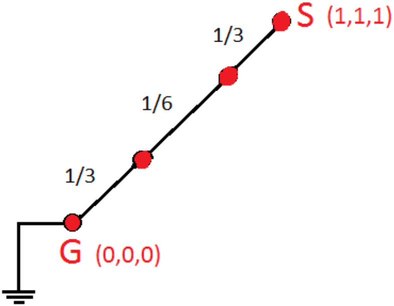
Verovatnoća da završimo u crnoj rupi

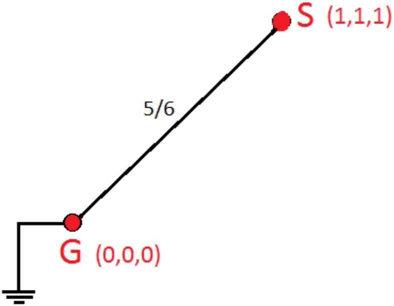
$$
\begin{aligned}
i_S &= \sum_{y \in N(S)} (v(S) - v(y)) \cdot C_{Sy} \\
&= \sum_{y \in N(S)} (v(S) - v(y)) \cdot \frac{C_{Sy}}{C_S} \cdot C_S \\
&= C_S \cdot (v(S) \sum_{y \in N(S)} \frac{C_{Sy}}{C_S} - \sum_{y \in N(S)} v(y) \frac{C_{Sy}}{C_S}) \\
&= C_S \cdot (v(S) - \sum_{y \in N(S)} v(y) \frac{C_{Sy}}{C_S}) \\
&= C_S \cdot p_{esc}
\end{aligned}
$$

Šetanje po kocki

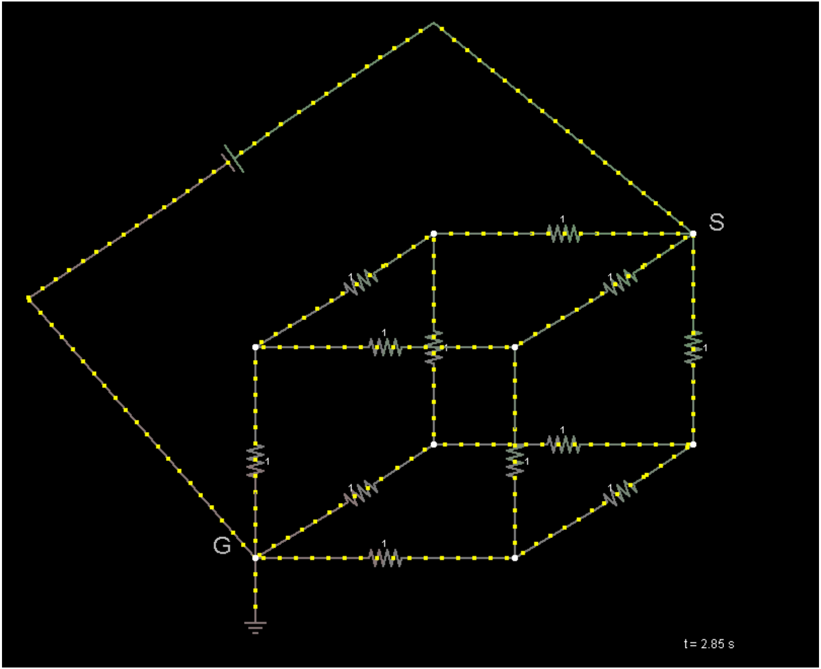



S (1,1,1)
G (0,0,0)

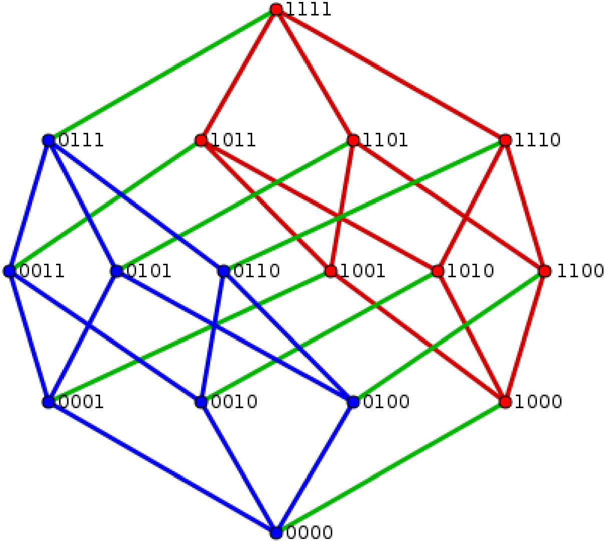


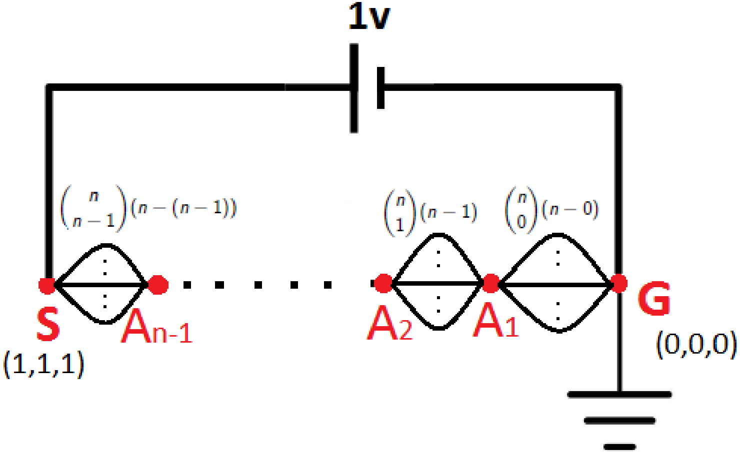


1 6


S
G
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
t= 2.85 s

Šetanje po n-kocki





$$R_{eff} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}(n-k)}$$

$$i_S = \frac{1}{R_{eff}}$$

$$C_S = n$$

$$p_{esc} = \frac{i_S}{C_S} = \frac{1}{n \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}(n-k)}}$$

$$n = 3 : p_{esc} = \frac{1}{3 \cdot \frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

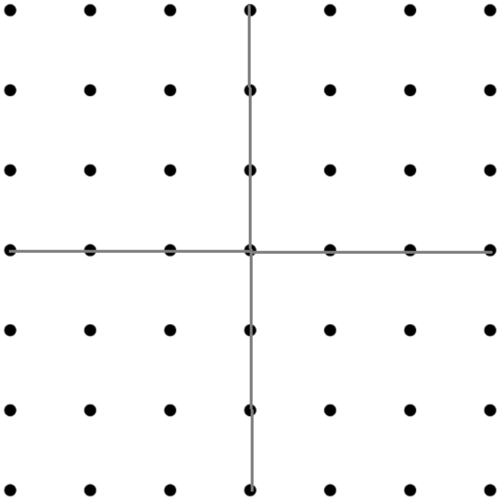
Teorema o promeni otpora

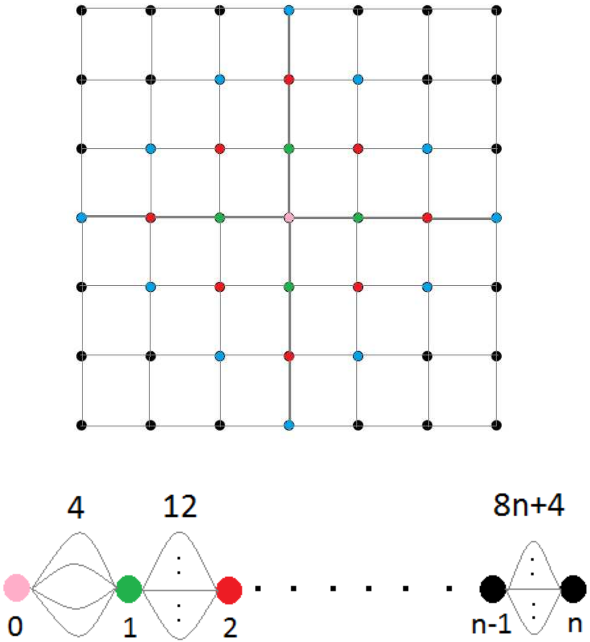
Teorema. Ako se jedan otpornik u kolu poveća, tada se efektivni otpor kola ne može smanjiti. Ako se jedan otpornik smanji, tada se efektivni otpor ne može povećati.

Sečenjem žica se efektivni otpor povećava, ili ne menja.

Spajanjem čvorova se efektivni otpor smanjuje, ili ne menja.

Šetnja u $\mathbb{Z}^2$



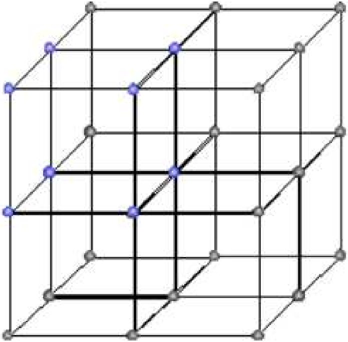

4
12
8n+4
0
1
2
n-1
n

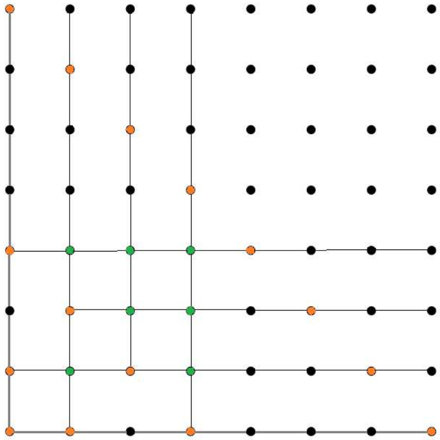
$$R_{eff} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{8n+4}$$

$$p_{esc} \leq \frac{i_S}{C_S} = \frac{1}{4 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{8n+4}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$p_{esc} = 0$$

Šetnja u $\mathbb{Z}^3$

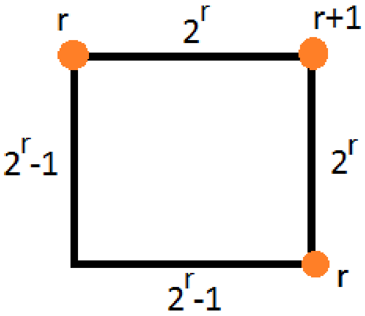


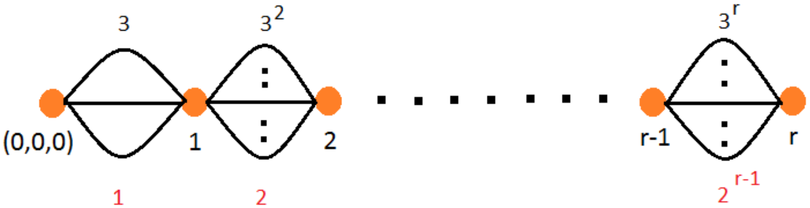


Narandžaste tačke su na rastojanju $\sum_{i=0}^{r-1} 2^i$ od koordinatnog početka.

$r-$ta tačka je na rastojanju $2^r - 1$.

Dve poluprave se ne mogu seći u narandžastim tačkama.





$$R_{eff} \leq \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^r - 1}{\frac{2}{3} - 1} \xrightarrow{r\to\infty} 1$$

$$p_{esc} = \frac{i_S}{C_S} = \frac{1}{C_S \cdot R_{eff}} \geq \frac{1}{3}$$

$$(p_{esc} \sim 0.63)$$

Šetnja u $\mathbb{Z}^d, d > 2$

$$R_{eff} \leq \frac{1}{d-2}$$

$$p_{esc} = \frac{1}{C_S \cdot Reff} \geq \frac{d-2}{d}$$

Hvala na pažnji.