Matematička struktura matematičkih struktura (Uvod u teoriju kategorija)

Viktor Cerovski

Institut za fiziku Beograd

viktor.cerovski@gmail.com

(tekst za predavanje održano u Petnici 23 Marta 2011.)

Sadržaj

Motivacija

- U topologiji, pored geometrijskih oblika, koji su skupovi tačaka, značajne su i kontinualne transformacije oblika.
- Automati mogu da se reprezentuju stanjem automata zajedno sa skupom operacija koje menjaju jedno stanje u drugo.
- U logici, dokaz logičke tvrdnje se sastoji u primeni skupa pravila logičkih zaključivanja na zadati skup iskaza.
- Funkcije mogu da se definišu i konstruktivno, kao kombinacije nekog malog broja jednostavnih funkcija.

Neformalno, **kategorija = objekti + transformacije objekata.**

	objekti	transformacije
Topologija	geometrijska tela	kontinualne deformacije
Logika	logički iskazi	pravila rasudjivanja
Računarstvo	tipovi podataka	funkcije / potprogrami
Fizika	stanje sistema	fizički proces

Notacija

Transformacija f objekta tipa A u objekat tipa B, $f : A \to B$, praćena sa g i h, se zapisuje na neki od sledeća tri načina:

- dijagramom
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D\ ,$$
- grafički
$$\xrightarrow{A} \boxed{f} \xrightarrow{B} \boxed{g} \xrightarrow{C} \boxed{h} \xrightarrow{D}\ ,$$
- algebarski (formulom)
$$h \circ g \circ f$$

Transformacije f, g, h se zovu strelice, mape ili morfizmi.

Kategorija (definicija)

Kategorija $\mathbf{C}$ se sastoji od kolekcije *objekata* $A, B, C, \cdots \in |\mathbf{C}|$,i *strelica (morfizama, mapa)* izmedju objekata $f, g, h, \cdots \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}}$,

$$f \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \Leftrightarrow f : A \to B,$$

sa osobinama (aksiome):

1. Za svaki objekat $A \in |\mathbf{C}|$ postoji mapa $\mathrm{id}_A : A \to A$ takva da za svaku strelicu $f : A \to B$ važi:

$$f \circ \mathrm{id}_A = f,\ \mathrm{id}_B \circ f = f$$

2. Za svake dve mape $f : A \to B, g : B \to C$, njihova *kompozicija* je takodje mapa:

$$g \circ f : A \to C \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(A, C)$$

3. Kompozicija mapa je *asocijativna*:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Najjednostavnija kategorija, **1**

Jedan objekat i jedna strelica: $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$

Ako za objekat uzmemo skup od n elemenata, aksioma 1. zahteva da kompozicija strelica bude takodje strelica, što u ovom slučaju znači da treba da važi:

$$\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A.$$

Kategorija sa jednim objektom i dve strelice

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Objektima i strelicama prvo dodelimo simbole:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "f"] \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

Da bi ova struktura bila kategorija, f i g ne mogu biti proizvoljne:

- Po aksiomama, moramo da imamo id_A, te stoga uzimamo:

$$g = \mathrm{id}_A$$

- Kompozicija strelica mora da bude strelica. Pošto

$$f \circ f : A \to A,$$

  $f \circ f$ može da bude *ili* f *ili* id_A.
- Kompozicija strelica mora da bude asocijativna.

Kategorija sa jednim objektom i dve strelice (nastavak)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[loop right, "f"] \end{tikzcd}$$

- Prvo rešenje:
$$f \circ f = \mathrm{id}_A \quad \Leftrightarrow \quad f = f^{-1}$$
Konkretni primeri:
  - A je skup $\mathbb{R}$, id_A je funkcija $x \mapsto x$, f je $x \mapsto -x$.
  - A je skup svih geometrijskih tela u ravni, f je rotacija za π.
- Drugo rešenje:
$$f \circ f = f$$
Konkretan primer:
A su vektori u ravni,
f je projekcija vektora $\vec{r}$ na neki fiksni vektor $\vec{v}$, $\vec{r} \mapsto (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}$

Funktor

Svako od ovih rešenja možemo da predstavimo sa po jednim *mapiranjem*, F, objekta i strelica kategorije u skupove i funkcije konkretnog primera kategorije:

$$\begin{aligned} F &: A \mapsto \mathbb{R} \\ F &: \mathrm{id}_A \mapsto (y(x) = x) \\ F &: f \mapsto (y(x) = -x) \end{aligned}$$

Generalno, mapiranje jedne kategorije u drugu se zove **funktor**. Ono naravno ne može da bude proizvoljno, već mora da "prenese" bar deo strukture sa prve na drugu kategoriju.

Precizna definicija sledi...

Funktor (definicija)

Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se sastoji od dva mapiranja:

(i) $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ (mapiranje objekata)

(ii) $F : \hom_{\mathbf{C}}(A, B) \to \hom_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$ (mapiranje strelica)

sa osobinama:

1. $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, ili, dijagramatski:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"] & C \arrow[d, "F"] \\
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C)
\end{tikzcd}
$$

Komutativni dijagram

Jednačine izmedju strelica se često predstavljaju dijagramima.
Na primer, jednačina:

$$f : A \to B, \;\; g : B \to A, \;\; g \circ f = \mathrm{id}_A$$

se predstavlja kao:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Ako, kada preslikamo A u B sa f, pa B u A sa g, dobijemo isto kao i kada preslikamo A u A sa id_A, onda kažemo da *dijagram komutira*, tj. jednačina $g \circ f = \mathrm{id}_A$ je zadovoljena.

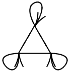
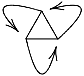
Kategorija sa objektom i tri strelice

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[loop left, "f"] \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

Opet imamo samo nekoliko mogućih f i g. Jedno od njih je:

$$f \circ f = g \;, \quad f \circ f \circ f = \mathrm{id}_A$$

Konkretnu kategoriju koja zadovoljava ovo rešenje možemo da opišemo sledećim funktorom F:

$F : A \mapsto$  , $\mathrm{id}_A \mapsto$  , $f \mapsto$  , $g \mapsto$ 

(*skup rotacija koje ostavljaju jednakostran. trougao nepromenjenim*).

Kategorija sa objektom i tri strelice (nastavak)

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[loop left, "f"] \arrow[loop right, "g"]
\end{tikzcd}
$$

Još jedno partikularno rešenje, opisano funktorom G:

$$
\begin{aligned}
G(A) &= \mathbb{N} \\
G(\mathrm{id}_A) &= (y = n) \\
G(f) &= (y = n + 1 \mod 3) \\
G(g) &= (y = n + 2 \mod 3)
\end{aligned}
$$

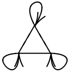
Sada imamo dve konkretne kategorije, opisane sa F i G.
Ove dve kategorije možemo da mapiramo jednu na drugu:

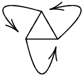
$\tau : F(A) \mapsto G(A), F(\mathrm{id}_A) \mapsto G(\mathrm{id}_A), F(f) \mapsto G(f), F(g) \mapsto G(g).$

Drugim rečima...

... imamo mapu τ:

 $\xmapsto{\tau}$ $\mathbb{N}$

 $\xmapsto{\tau}$ $(y = n)$

 $\xmapsto{\tau}$ $(y = n + 1 \mod 3)$

 $\xmapsto{\tau}$ $(y = n + 2 \mod 3)$

Ovakvo mapiranje izmedju dva funktora je primer *prirodne transformacije*.

Ono naravno mora da očuva strukturu kategorije, ali, generalno, ne mora da bude invertibilno kao u gornjem primeru.

Definicija sledi...

Prirodna transformacija (definicija)

Prirodna transformacija je *familija* preslikavanja izmedju dva funktora, $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, definisana za svaki objekat $A \in |\mathbf{C}|$, sa osobinama:

1. $\tau_A : F(A) \to G(A)$
2. Sledeći dijagram komutira za svako f:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Kategorija sa jednim objektom i n strelica

Prema definiciji, kategorija $\mathbf{C}$ sa objektom A i kolekcijom mapa $\hom_{\mathbf{C}}(A, A)$, ima sledeće osobine:

1. Jedna od mapa mora da bude id_A (*jedinična mapa*).
2. Kompozicija mapa je mapa (*zatvorenost kompozicije*).
3. Kompozicija mapa je *asocijativna*.

Matematička struktura koja se sastoji od skupa S i binarne operacije ρ sa gornje tri osobine se zove **monoid**. Kategorija sa jednim objektom stoga uvek predstavlja monoid.

Ako za svaku mapu f još postoji i mapa g takva da:

4. $f \circ g = \mathrm{id}_A \Leftrightarrow g = f^{-1}$ (*inverzna mapa*),

takva kategorija predstavlja **grupu**.

Kategorije sa dva objekta

- Kategorija **2** je:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd}$$

  U ovom slučaju f može da bude proizvoljna mapa izmedju A i B.

- $$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

  Kompozicija $f \circ g : B \to B$. Jedina takva mapa je id_B, te stoga:

$$f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

  i, sličnim rezonovanjem,

$$g \circ f = \mathrm{id}_A,$$

  Dakle f i g su inverzne mape jedna drugoj, $g = f^{-1}$. Invertibilna mapa f se zove **izomorfizam**.

Kategorije sa dva objekta

- Kategorija **2** je:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd}$$

  U ovom slučaju f može da bude proizvoljna mapa izmedju A i B.

- $$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

  Kompozicija $f \circ g : B \to B$. Jedina takva mapa je id_B, te stoga:

$$f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

  i, sličnim rezonovanjem,

$$g \circ f = \mathrm{id}_A,$$

  Dakle f i g su inverzne mape jedna drugoj, $g = f^{-1}$. Invertibilna mapa f se zove **izomorfizam**.

Zadaci

1) Odgovoriti na sledeća pitanja i za svako dati bar *dva* primera:

(a) Šta su: skup? element skupa? podskup?

(b) Šta je preslikavanje (funkcija)?

(c) Šta je domen, a šta kodomen funkcije?

(d) Kada je funkcija "na" (injektivna)?

(e) Kada je funkcija "1-1" (surjektivna)?

(f) Kada je funkcija invertibilna (bijektivna)?

(g) Kada dva skupa imaju isti broj elemenata?

2) Dokazati da ima isti broj neparnih i prirodnih brojeva.

3) Dokazati da ima isti broj tačaka na realnoj osi i na intervalu (0,1).

4) Dokazati da ima isti broj prirodnih i prostih brojeva.

5) Koji skup ima više tačaka: interval (0,1) ili interval (0,1]?

6) Jedan od načina da se predstavi mapa f je preko dijagrama u kome su dva elementa a, b skupa S povezana strelicom od a do b akko $f(a) = b$, gde je f neka funkcija (ovakav prikaz se zove *endomapa*).

(a) Koliko strelica endomape može da podje od nekog elementa skupa?

(b) Koliko strelica endomape može da završi u nekom elementu skupa?

(c) Konstruisati tri primera f, g, h endomape na nekom skupu S.

(d) Konstruisati endomapu $(h \circ g) \circ f$. Da li je $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$?

(e) Konstruisati endomapu na skupu S koja nije funkcija na S.

7) Konstruisati tri primera endomape f koja zadovoljava $f \circ f = f$.

8) Koliko endomapa f koje zadovoljavaju $f = f \circ f$ ima skup od n elemenata?

9) Pravilan poligon sa n temena P_n ima bar n rotacija koje ostavljaju poligon invarijantnim.

(a) Pokazati da skup rotacija zajedno sa kompozicijom dve rotacije čini grupu.

(b) Koliko mapa ima kategorija čiji je objekat P_n a transformacije rotacije koje ostavljaju poligon invarijatnim?

10) Konstruisati funktore:

(a) sa proizvoljne kategorije $\mathbf{C}$ na kategoriju $\mathbf{1}$;

(b) sa kategorije $\mathbf{1}$ na proizvoljnu kategoriju $\mathbf{C}$.

(c) Koliko ima funktora u svakom od prethodna dva slučaja?

11)

(a) Pokazati da skup funkcija $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = kx$, $k \in \mathbb{N}$, predstavlja kategoriju.

(b) Pokazati isto kao u (a) kada je $f_k(x) = k + x$.

(c) Konstruistati prirodnu transformaciju izmedju funktora dobijenih u (a) i (b).

12) Kolekcija objekata nije skup objekata, jer skup ne može da ima dva *ista* elementa, dok kolekcija može. Na primer, kategorija

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd} ,$$

definisana na dva konačna skupa A i B postaje, ako je $A = B$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, bend left, "f"] & A \arrow[loop right, "\mathrm{id}_A"] \end{tikzcd} ,$$

i stoga ima dva ista objekta i tri mape. U ovom slučaju sve tri strelice su endomape skupa A.

(a) Demonstrirati da mape id_A na levom i na desnom A ne moraju da budu iste.

(b) Dokazati da ako je f *na* (surjekcija), postoji samo jedno rešenje za oba id_A i pronaći ga.

(c) konstruisati funktor za oba slučaja (a) i (b) sa kategorije na jednostavniju ekvivalentu kategoriju.

13) Nacrtati komutativni dijagram koji predstavlja prvu aksiomu iz definicije kategorije (postojanje identične mape).

14) Nacrtati komutativni dijagram koji predstavlja drugu aksiomu iz definicije kategorije (asocijativnost mapa).

15) Relacija parcijalnog poretka (uredjenja) $\sqsubseteq$ izmedju elemenata nekog skupa S je svaka relacija koja je:

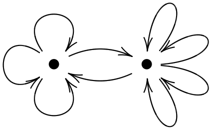
1) refleksivna: $\forall a \in S, a \sqsubseteq a$,
2) antisimetrična: $a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a \Rightarrow a = b$,
3) tranzitivna: $a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c \Rightarrow a \sqsubseteq c$.

(a) Pokazati da svaka relacija parcijalnog poretka daje jednu kategoriju.

(b) U čemu je razlika izmedju relacije parcijalnog i totalnog poretka? Dati primer.

16) Neka su:
T skup svih jednakostraničnih trouglova sa jednim obeleženim temenom;
K skup svih kvadrata sa jednim obeleženim temenom;
f_0, f_1, f_2 rotacije trougla oko težišta za $0, 2\pi/3, 4\pi/3$, respektivno;
g_0, g_1, g_2, g_3 rotacije kvadrata oko centra za $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, respektivno;
h mapa koja transformiše dati jednakostranični trougao u četvorougao sa istim obeleženim temenom, i sa centrom gde je težište trougla.

(a) Pokazati da A, f_n, B, g_m i h formiraju sledeću kategoriju:



(b) Obeležiti strelice i objekte ove kategorije sa A, f_n, B, g_m i h.

(c) Da li je obeležavanje pod (b) jedinstveno?

(d) U svakoj od sledećih transformacija zameniti upitnike sa geometrijskim oblikom tako da svaka pojedinačna transformacija bude tačna:

(i)

$$? \xmapsto{f_2} ? \xmapsto{f_1} ?$$

(ii)

$$? \xmapsto{g_2} ? \xmapsto{g_3} ?$$

(iii)

$$? \xmapsto{f_1} ? \xmapsto{h} ? \xmapsto{g_2} ?$$

(iv)

$$? \xmapsto{g_3} ? \xmapsto{h^{-1}} ? \xmapsto{f_2} ? \xmapsto{f_0} ? \xmapsto{h} ?$$

(v) Dati kratak opis svake od četiri gornje kompozicije transformacija.

17) Pronaći sva rešenja za strelice kategorije