Geometrije 101

Andreja Ilić

Univerzitet u Nišu
Prirodno Matematički Fakultet

februar 2010

Istraživačka stanica Petnica

O metematičkim teorijama

U izgradnji bilo koje valjano zasnovane teorije nije moguće dokazati sve stavove i definisati sve pojmove. Izgradnja matematičke discipline zasniva se na nekim zajedničkim polaznim 'principima'.

- Deduktivni ili aksiomatski sistem
- Zašto deduktivni način zaključivanja? Zašto postoje pojmovi koji se ne definišu odnosno tvrdjenja koja se ne dokazuju?

O metematičkim teorijama

U izgradnji bilo koje valjano zasnovane teorije nije moguće dokazati sve stavove i definisati sve pojmove. Izgradnja matematičke discipline zasniva se na nekim zajedničkim polaznim 'principima'.

- Deduktivni ili aksiomatski sistem
- Zašto deduktivni način zaključivanja? Zašto postoje pojmovi koji se ne definišu odnosno tvrdjenja koja se ne dokazuju?

Prilikom izgradnje jedne aksiomatske teorije najpre uvodimo sledeće:

- jedan broj pojmova (termina) teorije proglašavamo za **osnovne pojmove ili primitivne pojmove (eng. primitives)** - pojmove koji se ne definišu
- jedan broj tvrdjenja teorije proglašavamo za **aksiome (eng. axioms)** (od grčke reči koja u prevodu znači 'biti dosledan') - tvrdjenja koja se ne dokazuju

Bez obzira na postojanje velike slobode u izboru aksioma neke deduktivne teorije to ne znači i odsustvo bilo kakavih zahteva:

- *neprotivurečnost sistema*
- *potpunost sistema* (?)
- *nezavisan sistem*
- *minimalan*

Prilikom izgradnje jedne aksiomatske teorije najpre uvodimo sledeće:

- jedan broj pojmova (termina) teorije proglašavamo za **osnovne pojmove ili primitivne pojmove (eng. primitives)** - pojmove koji se ne definišu
- jedan broj tvrdjenja teorije proglašavamo za **aksiome (eng. axioms)** (od grčke reči koja u prevodu znači 'biti dosledan') - tvrdjenja koja se ne dokazuju

Bez obzira na postojanje velike slobode u izboru aksioma neke deduktivne teorije to ne znači i odsustvo bilo kakavih zahteva:

- *neprotivurečnost sistema*
- *potpunost sistema* (?)
- *nezavisan sistem*
- *minimalan*

Prilikom izgradnje jedne aksiomatske teorije najpre uvodimo sledeće:

- jedan broj pojmova (termina) teorije proglašavamo za **osnovne pojmove ili primitivne pojmove (eng. primitives)** - pojmove koji se ne definišu
- jedan broj tvrdjenja teorije proglašavamo za **aksiome (eng. axioms)** (od grčke reči koja u prevodu znači 'biti dosledan') - tvrdjenja koja se ne dokazuju

Bez obzira na postojanje velike slobode u izboru aksioma neke deduktivne teorije to ne znači i odsustvo bilo kakavih zahteva:

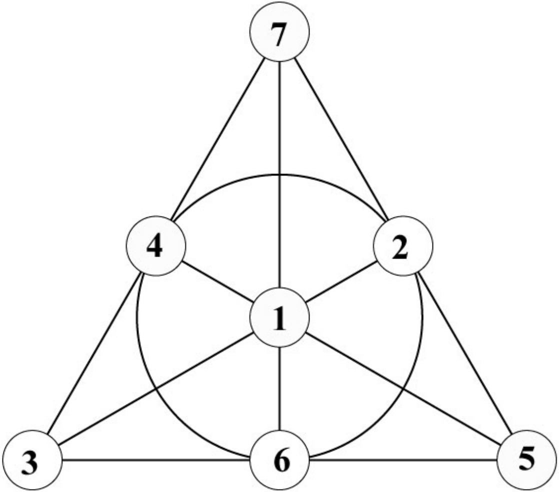
- *neprotivurečnost sistema*
- *potpunost sistema* (?)
- *nezavisan sistem*
- *minimalan*

Posmatrajmo naredni sistem aksioma nad skupom S, čije elemente nazivamo *šargarepama*, i familijom F podskupova skupa S, koje nazivamo *zekama*. Relaciju pripadnosti šargarepe zecu nazivano 'ishranom', tj. tada kažemo da zeka jede kupus.

1. Za svake dve različite šargarepe postoji tačno jedan zeka koji ih jede.
2. Za svaki par različitih zečeva postoji tačno jedana šargarepa koji obojica jedu.
3. Postoje četiri šargarepa takvih da nikoja tri ne jede isti zeka.
4. Skup šargarepa je konačan.

Posmatrajmo naredni sistem aksioma nad skupom S, čije elemente nazivamo *šargarepama*, i familijom F podskupova skupa S, koje nazivamo *zekama*. Relaciju pripadnosti šargarepe zecu nazivano 'ishranom', tj. tada kažemo da zeka jede kupus.

1. Za svake dve različite šargarepe postoji tačno jedan zeka koji ih jede.
2. Za svaki par različitih zečeva postoji tačno jedana šargarepa koji obojica jedu.
3. Postoje četiri šargarepa takvih da nikoja tri ne jede isti zeka.
4. Skup šargarepa je konačan.


7
4
2
1
3
6
5

Grupe aksioma u geometriji

U zasnivanju geometrije polazimo od proizvoljnog skupa S, dveju klasa C_l i C_π podskupova skupa S, dveju relacija B i C nad skupom S od kojih je prva troelementna a druge četvoroelementna.

- Skup s nazivamo prostorom, a njegove elemente tačkama.
- Elemente klase C_l nazivamo pravama, a elemente klase C_π ravnima.
- Troelementu relaciju B nazivamo relacijom izmedju. Relaciju C nad skupom S nazivamo relacijom podudardnosti.
- Svaki neprazan skup tačaka prostora S nazivamo geometrijskim likom, objektom ili figurom.

Grupe aksioma u geometriji

U zasnivanju geometrije polazimo od proizvoljnog skupa S, dveju klasa C_l i C_π podskupova skupa S, dveju relacija B i C nad skupom S od kojih je prva troelementna a druge četvoroelementna.

- Skup s nazivamo prostorom, a njegove elemente tačkama.
- Elemente klase C_l nazivamo pravama, a elemente klase C_π ravnima.
- Troelementu relaciju B nazivamo relacijom izmedju. Relaciju C nad skupom S nazivamo relacijom podudardnosti.
- Svaki neprazan skup tačaka prostora S nazivamo geometrijskim likom, objektom ili figurom.

Aksiome geometrije razvrstaćemo u pet grupa i to su:

1. **Akisome incidencije** (devet aksioma)
2. **Akisome poretka** (šest aksioma)
3. **Akisome podudarnosti** (sedam aksioma)
4. **Aksiome neprekidnosti** (jedna aksioma)
5. **Aksiome paralelnosti** (jedna aksioma)

Aksiome incidencije

1. Svaka prava sadrži najmanje dve tačke.
2. Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke.
3. Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke.
4. Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke.
5. Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.
6. Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.
7. Ako dve razne tačke neke prave p pripadaju ravni π, onda sve tačke prave p pripadaju ravni π
8. Ako dve ravni α i β imaju zajedničku tačku A, onda one imaju još najmanje jednu zajedničku tačku B.
9. Postoje četiri nekomplanarne tačke.

Neke od posledica aksioma incidencije su:

Lema

Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu p i datu tačku A izvan nje.

Lema

Postoji tačno jedna ravan koja sadrži dve prave p i q koje se seku u jednoj tački.

Lema

Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, tada je njihov presek prava.

Neke od posledica aksioma incidencije su:

Lema

Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu p i datu tačku A izvan nje.

Lema

Postoji tačno jedna ravan koja sadrži dve prave p i q koje se seku u jednoj tački.

Lema

Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, tada je njihov presek prava.

Neke od posledica aksioma incidencije su:

Lema

Postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu p i datu tačku A izvan nje.

Lema

Postoji tačno jedna ravan koja sadrži dve prave p i q koje se seku u jednoj tački.

Lema

Ako dve ravni imaju zajedničku tačku, tada je njihov presek prava.

- Euklid u svojim Elementima nije aksiomatski uveo pojam pored tačaka na pravoj
- Prvi koji je uvideo njihovu neophodnost je Gaus
- Merenje duži?
- Tek je M. Paš (1777 - 1855) uveo pojam relacije izmedju bez eksplicitne definicije mere.
- Kasnije je taj sistem upotpunjen od strane Peana i Hilberta

- Euklid u svojim Elementima nije aksiomatski uveo pojam pored tačaka na pravoj
- Prvi koji je uvideo njihovu neophodnost je Gaus
- Merenje duži?
- Tek je M. Paš (1777 - 1855) uveo pojam relacije izmedju bez eksplicitne definicije mere.
- Kasnije je taj sistem upotpunjen od strane Peana i Hilberta

- Euklid u svojim Elementima nije aksiomatski uveo pojam pored tačaka na pravoj
- Prvi koji je uvideo njihovu neophodnost je Gaus
- Merenje duži?
- Tek je M. Paš (1777 - 1855) uveo pojam relacije izmedju bez eksplicitne definicije mere.
- Kasnije je taj sistem upotpunjen od strane Peana i Hilberta

- Euklid u svojim Elementima nije aksiomatski uveo pojam pored tačaka na pravoj
- Prvi koji je uvideo njihovu neophodnost je Gaus
- Merenje duži?
- Tek je M. Paš (1777 - 1855) uveo pojam relacije izmedju bez eksplicitne definicije mere.
- Kasnije je taj sistem upotpunjen od strane Peana i Hilberta

Aksiome poretka

1. Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke takvde da je $B(A, B, C)$ tada su tačke A, B i C medjusobno različite.
2. Ako su A, B i C tri kolinearne tačke takve da je $B(A, B, C)$ tada je i $B(C, B, A)$.
3. Ako su A, B i C tri kolinearne tačke takve da je $B(A, B, C)$ tada nije $B(A, C, B)$.
4. Ako su A i B dve razne tačke prave p, tada na pravoj p postoji tačka C takva da je $B(A, B, C)$.
5. Ako su A, B i C tri razne kolinearne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija $B(A, B, C)$, $B(A, C, B)$ ili $B(C, A, B)$.
6. Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke ravni π i prava l pripada ravni π, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P, takvoj da je $B(B, P, C)$, tada prava l seče i pravu AC u Q koja je izmedju tačaka A i C ili pravu AB u tački R koja je izmedju tačaka A i B.

Na ovom slajdu su prikazane neke od posledica aksioma poretka. Iako intuitivno jasne njihovo dokazivanje nije toliko jednostavno.

Lema

Ako su A, B i C tri razne kolinearne tačke tada važi samo jedna od relacija iz aksiome II5.

Lema

Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke, a D, E i F tačke pravih BC, CA, AB takvih da je $B(B, D, C)$, $B(C, E, A)$, $B(A, F, B)$, *tada tačke D, E i F nisu kolinearne.*

Lema

Ako su A i B dve razne tačke tada na pravoj AB postoji tačka C takva da je izmedju A i B.

Na ovom slajdu su prikazane neke od posledica aksioma poretka. Iako intuitivno jasne njihovo dokazivanje nije toliko jednostavno.

Lema

Ako su A, B i C tri razne kolinearne tačke tada važi samo jedna od relacija iz aksiome II5.

Lema

Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke, a D, E i F tačke pravih BC, CA, AB takvih da je $\mathcal{B}(B, D, C)$, $\mathcal{B}(C, E, A)$, $\mathcal{B}(A, F, B)$, tada tačke D, E i F nisu kolinearne.

Lema

Ako su A i B dve razne tačke tada na pravoj AB postoji tačka C takva da je izmedju A i B.

Na ovom slajdu su prikazane neke od posledica aksioma poretka. Iako intuitivno jasne njihovo dokazivanje nije toliko jednostavno.

Lema

Ako su A, B i C tri razne kolinearne tačke tada važi samo jedna od relacija iz aksiome II5.

Lema

Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke, a D, E i F tačke pravih BC, CA, AB takvih da je $\mathcal{B}(B, D, C)$, $\mathcal{B}(C, E, A)$, $\mathcal{B}(A, F, B)$, tada tačke D, E i F nisu kolinearne.

Lema

Ako su A i B dve razne tačke tada na pravoj AB postoji tačka C takva da je izmedju A i B.

- Aksiome poretka su neophodne za definisanje mnogih novih pojmova
- Kako definisati duž?

Definicija

Neka su A i B dve razne tačke prave l. Otvorenom duži u oznaci (AB) nazivamo skup svih tačaka X takvih da su izmedju A i B.

$$(AB) = \{X \in l | B(A, X, B)\}$$

- Poluprava, poluravan, poluprostor?
- Žordanove teoreme o razlaganju ravni prostim poligonom.
- Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora

- Aksiome poretka su neophodne za definisanje mnogih novih pojmova
- Kako definisati duž?

Definicija

Neka su A i B dve razne tačke prave l. Otvorenom duži u oznaci (AB) nazivamo skup svih tačaka X takvih da su izmedju A i B.

$$(AB) = \{X \in l | B(A, X, B)\}$$

- Poluprava, poluravan, poluprostor?
- Žordanove teoreme o razlaganju ravni prostim poligonom.
- Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora

- Aksiome poretka su neophodne za definisanje mnogih novih pojmova
- Kako definisati duž?

Definicija

Neka su A i B dve razne tačke prave l. Otvorenom duži u oznaci (AB) nazivamo skup svih tačaka X takvih da su izmedju A i B.

$$(AB) = \{X \in l | B(A, X, B)\}$$

- Poluprava, poluravan, poluprostor?
- Žordanove teoreme o razlaganju ravni prostim poligonom.
- Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora

- Aksiome poretka su neophodne za definisanje mnogih novih pojmova
- Kako definisati duž?

Definicija

Neka su A i B dve razne tačke prave l. Otvorenom duži u oznaci (AB) nazivamo skup svih tačaka X takvih da su izmedju A i B.

$$(AB) = \{X \in l | B(A, X, B)\}$$

- Poluprava, poluravan, poluprostor?
- Žordanove teoreme o razlaganju ravni prostim poligonom.
- Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora

- Aksiome poretka su neophodne za definisanje mnogih novih pojmova
- Kako definisati duž?

Definicija

Neka su A i B dve razne tačke prave l. Otvorenom duži u oznaci (AB) nazivamo skup svih tačaka X takvih da su izmedju A i B.

$$(AB) = \{X \in l | B(A, X, B)\}$$

- Poluprava, poluravan, poluprostor?
- Žordanove teoreme o razlaganju ravni prostim poligonom.
- Peanovi stavovi o identifikaciji pravih, ravni i prostora

Aksiome podudarnosti

1. Za svake dve tačke $A, B \in S$ je $(A, A) \cong (B, B)$.
2. Za svake dve tačke $A, B \in S$ je $(A, B) \cong (B, A)$.
3. Ako su $A, B, C, D, E, F \in S$ tavke da je $(A, B) \cong (C, D)$ i $(A, B) \cong (E, F)$ tada je i $(C, D) \cong (E, F)$.
4. Ako su C i C' tačke otvorenih duži (AB) i $(A'B')$ redom, takve da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$ tada je i $(A, B) \cong (A', B')$.
5. Ako su A i B dve razne tačke i ako je A' kraj neke poluprave p, tada na polupravoj p postoji tačka B' takva da je $(A, B) \cong (A', B')$.
6. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A', B' dve razne tačke ruba neke poluravni π takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, tada u poluravni π postoji tačno jedan tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$.
7. Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$ i $(B, D) \cong (B', D')$ tada je i $(A, D) \cong (A', D')$.

Definicija

Bijektivno preslikavanje $I : R^n \mapsto R^n$ nazivamo izometrijskom transformacijom prostora R^n ako za proizvoljne dve tačke A i B prostora R^n važi da je:

$$(A, B) \cong (I(A), I(B))$$

Definicija

Kažemo da je lik F prostora R^n podudaran liku F' ako postoji izometrijska transformacija koja jedan slika u drugi.

Koje su izometrijske transformacije ravni?

Definicija

Bijektivno preslikavanje $I : R^n \mapsto R^n$ nazivamo izometrijskom transformacijom prostora R^n ako za proizvoljne dve tačke A i B prostora R^n važi da je:

$$(A, B) \cong (I(A), I(B))$$

Definicija

Kažemo da je lik F prostora R^n podudaran liku F' ako postoji izometrijska transformacija koja jedan slika u drugi.

Koje su izometrijske transformacije ravni?

Definicija

Bijektivno preslikavanje $I : R^n \mapsto R^n$ nazivamo izometrijskom transformacijom prostora R^n ako za proizvoljne dve tačke A i B prostora R^n važi da je:

$$(A, B) \cong (I(A), I(B))$$

Definicija

Kažemo da je lik F prostora R^n podudaran liku F' ako postoji izometrijska transformacija koja jedan slika u drugi.

Koje su izometrijske transformacije ravni?

Dedekindova aksiome neprekidnosti

Aksioma

Neka su M i N dva neprazna skupa tačaka orijentisane prave p tako da za prozivoljne tačke $P \in M$ i $Q \in N$, važi da je tačka P pre tačke Q, pri čemu je unija skupova M i N cela prava. Tada na pravoj p postoji tačka X takva da za svako $P \in M$ i $Q \in N$ važi da je $P \prec X \prec Q$.

- Uvodjenje mere duži
- Presek prave i kruga; presek krugova; postojanje tangenti...

- Ekvivalentost sa: Arhimedovim i Kantorovim stavom

Dedekindova aksiome neprekidnosti

Aksioma

Neka su M i N dva neprazna skupa tačaka orijentisane prave p tako da za prozivoljne tačke $P \in M$ i $Q \in N$, važi da je tačka P pre tačke Q, pri čemu je unija skupova M i N cela prava. Tada na pravoj p postoji tačka X takva da za svako $P \in M$ i $Q \in N$ važi da je $P \prec X \prec Q$.

- Uvodjenje mere duži
- Presek prave i kruga; presek krugova; postojanje tangenti...
- Ekvivalentost sa: Arhimedovim i Kantorovim stavom

Dedekindova aksiome neprekidnosti

Aksioma

Neka su M i N dva neprazna skupa tačaka orijentisane prave p tako da za prozivoljne tačke $P \in M$ i $Q \in N$, važi da je tačka P pre tačke Q, pri čemu je unija skupova M i N cela prava. Tada na pravoj p postoji tačka X takva da za svako $P \in M$ i $Q \in N$ važi da je $P \prec X \prec Q$.

- Uvodjenje mere duži
- Presek prave i kruga; presek krugova; postojanje tangenti...

- Ekvivalentost sa: Arhimedovim i Kantorovim stavom

Aksioma (Arhimedova)

Ako su AB i CD dve duži takve da je $AB > CD$ tada postoji prirodan broj n takav da je:

$$nCD \leq AB < (n+1)CD$$

Aksioma (Kantor)

Ako beskonačan niz zatvorenih duži $[A_i B_i$ neke prave p zadovoljava uslove:

- *sva duž tog niza sadrži sledeću duž*
- *ne postoji duž koja je sadržana u svim dučima tog niza*

tada postoji jedinstvena tačka X koja je sadržana u svim dužima tog niza.

Apsolutna geometrija

- Aksiomatika prve četiri grupe (grupe koje su navedene tokom predavanja) sačinjavaju aksiomatiku **apsolutne geometrije**.
- Ovo je apsolutna geometrija u smislu Boljaija i Lobačevskog, koja je ugledala svetlost dana 1832. godine.
- Najinteresantnije teoreme iz apsolutne geometrije vezane su za rad francuskog matematičara Ležandra (odnose se na zbirove unutrašnjih uglova trougla i n-tougla bez aksiome paralelnosti)
- Samom analizom apsolutne geometrije nastali su mnogi ekvivalenti Euklidovog petog postulata, odnosno aksiome paralelnosti.

Apsolutna geometrija

- Aksiomatika prve četiri grupe (grupe koje su navedene tokom predavanja) sačinjavaju aksiomatiku **apsolutne geometrije**.
- Ovo je apsolutna geometrija u smislu Boljaija i Lobačevskog, koja je ugledala svetlost dana 1832. godine.
- Najinteresantnije teoreme iz apsolutne geometrije vezane su za rad francuskog matematičara Ležandra (odnose se na zbirove unutrašnjih uglova trougla i n-tougla bez aksiome paralelnosti)
- Samom analizom apsolutne geometrije nastali su mnogi ekvivalenti Euklidovog petog postulata, odnosno aksiome paralelnosti.

Apsolutna geometrija

- Aksiomatika prve četiri grupe (grupe koje su navedene tokom predavanja) sačinjavaju aksiomatiku **apsolutne geometrije**.
- Ovo je apsolutna geometrija u smislu Boljaija i Lobačevskog, koja je ugledala svetlost dana 1832. godine.
- Najinteresantnije teoreme iz apsolutne geometrije vezane su za rad francuskog matematičara Ležandra (odnose se na zbirove unutrašnjih uglova trougla i *n*-tougla bez aksiome paralelnosti)
- Samom analizom apsolutne geometrije nastali su mnogi ekvivalenti Euklidovog petog postulata, odnosno aksiome paralelnosti.

Apsolutna geometrija

- Aksiomatika prve četiri grupe (grupe koje su navedene tokom predavanja) sačinjavaju aksiomatiku **apsolutne geometrije**.
- Ovo je apsolutna geometrija u smislu Boljaija i Lobačevskog, koja je ugledala svetlost dana 1832. godine.
- Najinteresantnije teoreme iz apsolutne geometrije vezane su za rad francuskog matematičara Ležandra (odnose se na zbirove unutrašnjih uglova trougla i n-tougla bez aksiome paralelnosti)
- Samom analizom apsolutne geometrije nastali su mnogi ekvivalenti Euklidovog petog postulata, odnosno aksiome paralelnosti.

Lema

Za svaki trougao $\triangle$ postoji trougao $\triangle_1$ takav da su zbirovi unutrašnjih uglova trougla $\triangle$ i $\triangle_1$ jednaki mesjusobno, a jedan unutrašnji ugao (odredjeni) $\triangle_1$ je dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla $\triangle$.

Teorema (Prva Ležandrova teorema)

U apsolutnoj geometriji zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla nije veći od zbira dva prava ugla.

Teorema (Druga Ležandrova teorema)

Ako je u jednom trouglu $\triangle ABC$ zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla tada je u svakom trouglu zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla.

Lema

Za svaki trougao $\triangle$ postoji trougao $\triangle_1$ takav da su zbirovi unutrašnjih uglova trougla $\triangle$ i $\triangle_1$ jednaki mesjusobno, a jedan unutrašnji ugao (odredjeni) $\triangle_1$ je dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla $\triangle$.

Teorema (Prva Ležandrova teorema)

U apsolutnoj geometriji zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla nije veći od zbira dva prava ugla.

Teorema (Druga Ležandrova teorema)

Ako je u jednom trouglu $\triangle ABC$ zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla tada je u svakom trouglu zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla.

Lema

Za svaki trougao $\triangle$ postoji trougao $\triangle_1$ takav da su zbirovi unutrašnjih uglova trougla $\triangle$ i $\triangle_1$ jednaki mesjusobno, a jedan unutrašnji ugao (odredjeni) $\triangle_1$ je dva puta manji od jednog unutrašnjeg ugla trougla $\triangle$.

Teorema (Prva Ležandrova teorema)

U apsolutnoj geometriji zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla nije veći od zbira dva prava ugla.

Teorema (Druga Ležandrova teorema)

Ako je u jednom trouglu $\triangle ABC$ zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla tada je u svakom trouglu zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla.

Teorema (Treća Ležandrova teorema)

Postoji trougao $\triangle$ kome je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla ako i samo ako u ravni π odredjenoj pravom p i tačkom A van nje postoji samo jedna prava a koja sadrži tačku A i ne seče pravu p.

Peti Euklidov postulat

- Aksioma paralelnosti je bila poznata kao stav još u Antičkim vremenima kod Grka.

Aksioma (Peti Euklidov Postulat)

Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma (Plejferova aksioma paralelnosti)

Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje tada u ravni $\pi(p, A)$ postoji jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p.

Peti Euklidov postulat

- Aksioma paralelnosti je bila poznata kao stav još u Antičkim vremenima kod Grka.

Aksioma (Peti Euklidov Postulat)

Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma (Plejferova aksioma paralelnosti)

Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje tada u ravni $\pi(p, A)$ postoji jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p.

Peti Euklidov postulat

- Aksioma paralelnosti je bila poznata kao stav još u Antičkim vremenima kod Grka.

Aksioma (Peti Euklidov Postulat)

Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma (Plejferova aksioma paralelnosti)

Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje tada u ravni $\pi(p, A)$ *postoji jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i nema zajedničkih tačaka sa pravom p.*

Teorema

Tvrdjenje "Zbir unutrašnjih uglova u proizvoljnom trouglu jednak je zbiru dva prava ugla", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Teorema

Tvrdjenje "Kroz makoje tri nekolinearne tačke prolazi krug" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti

Teorema

Tvrdjenje "U ravni postoje tri kolinearne tačke podjednako udaljenje od date prave" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Teorema

Tvrdjenje "Zbir unutrašnjih uglova u proizvoljnom trouglu jednak je zbiru dva prava ugla", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Teorema

Tvrdjenje "Kroz makoje tri nekolinearne tačke prolazi krug" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti

Teorema

Tvrdjenje "U ravni postoje tri kolinearne tačke podjednako udaljenje od date prave" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Teorema

Tvrdjenje "Zbir unutrašnjih uglova u proizvoljnom trouglu jednak je zbiru dva prava ugla", ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Teorema

Tvrdjenje "Kroz makoje tri nekolinearne tačke prolazi krug" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti

Teorema

Tvrdjenje "U ravni postoje tri kolinearne tačke podjednako udaljenje od date prave" ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Neeuklidove geometrije

- Početkom 19. veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj su nezavisno jedan od drugog došli na ideju da Euklidom peti postulat zamene aksiomom koja ga je negirala.
- Na taj način je dobijena teorija koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija.
- Tako je po prvi put dobijena jedna naučna teorija koja se nije zasnivala na očivlednosti i predstave koje stvaraju čula na osnovu nekog iskustva.
- Ove zamisli su potpuno priznanje dobile tek nakon njihove smrti.

Neeuklidove geometrije

- Početkom 19. veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj su nezavisno jedan od drugog došli na ideju da Euklidom peti postulat zamene aksiomom koja ga je negirala.
- Na taj način je dobijena teorija koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija.
- Tako je po prvi put dobijena jedna naučna teorija koja se nije zasnivala na očivlednosti i predstave koje stvaraju čula na osnovu nekog iskustva.
- Ove zamisli su potpuno priznanje dobile tek nakon njihove smrti.

Neeuklidove geometrije

- Početkom 19. veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj su nezavisno jedan od drugog došli na ideju da Euklidom peti postulat zamene aksiomom koja ga je negirala.
- Na taj način je dobijena teorija koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija.
- Tako je po prvi put dobijena jedna naučna teorija koja se nije zasnivala na očivlednosti i predstave koje stvaraju čula na osnovu nekog iskustva.
- Ove zamisli su potpuno priznanje dobile tek nakon njihove smrti.

Neeuklidove geometrije

- Početkom 19. veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj su nezavisno jedan od drugog došli na ideju da Euklidom peti postulat zamene aksiomom koja ga je negirala.
- Na taj način je dobijena teorija koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija.
- Tako je po prvi put dobijena jedna naučna teorija koja se nije zasnivala na očivlednosti i predstave koje stvaraju čula na osnovu nekog iskustva.
- Ove zamisli su potpuno priznanje dobile tek nakon njihove smrti.

Hiperbolička geometrija

- Ukoliko sistemu aksioma apsolutne geometrije dodamo aksiomu Lobačevskog, dobijamo geometriju koju ćemo zvati *Hiperboličkom geometrijom*.

Aksioma (Aksioma Lobačevskog)

Postoje prava a i tačka A van prava a, takve da u njima odredjenoj ravni kroz A prolaze dve različite prave b i c koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.

- Ravan i prostor u kome važe te aksiome nazivamo respektivno hiperboličkom ravni i hiperboličkim prostorom.

Hiperbolička geometrija

- Ukoliko sistemu aksioma apsolutne geometrije dodamo aksiomu Lobačevskog, dobijamo geometriju koju ćemo zvati *Hiperboličkom geometrijom*.

Aksioma (Aksioma Lobačevskog)

Postoje prava a i tačka A van prava a, takve da u njima odredjenoj ravni kroz A prolaze dve različite prave b i c koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.

- Ravan i prostor u kome važe te aksiome nazivamo respektivno hiperboličkom ravni i hiperboličkim prostorom.

Kako bi glasila teorema o zbiru unutrašnjih uglova u ovoj geometriji?

Teorema

Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla u ravni L^2 je strogo manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma Lobačevskog tvrdi postojanje dve paralelne prave sa trećom. Da li se ovo tvrdjenje može uopštiti?

Teorema

Ako su u jiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u L^2 postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.

Kako bi glasila teorema o zbiru unutrašnjih uglova u ovoj geometriji?

Teorema

Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla u ravni L^2 je strogo manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma Lobačevskog tvrdi postojanje dve paralelne prave sa trećom. Da li se ovo tvrdjenje može uopštiti?

Teorema

Ako su u jiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u L^2 postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.

Kako bi glasila teorema o zbiru unutrašnjih uglova u ovoj geometriji?

Teorema

Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla u ravni L^2 je strogo manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma Lobačevskog tvrdi postojanje dve paralelne prave sa trećom. Da li se ovo tvrdjenje može uopštiti?

Teorema

Ako su u jiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u L^2 postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.

Kako bi glasila teorema o zbiru unutrašnjih uglova u ovoj geometriji?

Teorema

Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla u ravni L^2 je strogo manji od zbira dva prava ugla.

Aksioma Lobačevskog tvrdi postojanje dve paralelne prave sa trećom. Da li se ovo tvrdjenje može uopštiti?

Teorema

Ako su u jiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u L^2 postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.

- U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Sem tih pet u geometriji Lobačevkosg postoji još jedna stav.

Teorema (Stav o podudarnosti trouglova)

Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dva trougla u L^2 medju sobom podudarni tasu su i ti trouglovi podudarni.

- Sličnost?
- Ovo je jedna od suštinskih razlika izmedju ove i Euklidske geometrije.

- U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Sem tih pet u geometriji Lobačevkosg postoji još jedna stav.

Teorema (Stav o podudarnosti trouglova)

Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dva trougla u L^2 medju sobom podudarni tasu su i ti trouglovi podudarni.

- Sličnost?
- Ovo je jedna od suštinskih razlika izmedju ove i Euklidske geometrije.

- U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Sem tih pet u geometriji Lobačevkosg postoji još jedna stav.

Teorema (Stav o podudarnosti trouglova)

Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dva trougla u L^2 medju sobom podudarni tasu su i ti trouglovi podudarni.

- Sličnost?
- Ovo je jedna od suštinskih razlika izmedju ove i Euklidske geometrije.

- U apsolutnoj geometriji postoji pet stavova o podudarnosti trouglova. Sem tih pet u geometriji Lobačevkosg postoji još jedna stav.

Teorema (Stav o podudarnosti trouglova)

Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dva trougla u L^2 medju sobom podudarni tasu su i ti trouglovi podudarni.

- Sličnost?
- Ovo je jedna od suštinskih razlika izmedju ove i Euklidske geometrije.

Neprotivurečnost teorije

- Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije.
- Te interpretacije nazivamo **modelima**.
- Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno odredjen.
- Konstrukcijom izvesnih modela želimo da omogućimo ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije.

Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečan.

Neprotivurečnost teorije

- Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije.
- Te interpretacije nazivamo **modelima**.
- Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno odredjen.
- Konstrukcijom izvesnih modela želimo da omogućimo ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije.

Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečan.

Neprotivurečnost teorije

- Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije.
- Te interpretacije nazivamo **modelima**.
- Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno odredjen.
- Konstrukcijom izvesnih modela želimo da omogućimo ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije.

Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečan.

Neprotivurečnost teorije

- Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije.
- Te interpretacije nazivamo **modelima**.
- Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno odredjen.
- Konstrukcijom izvesnih modela želimo da omogućimo ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije.

Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečan.

Neprotivurečnost teorije

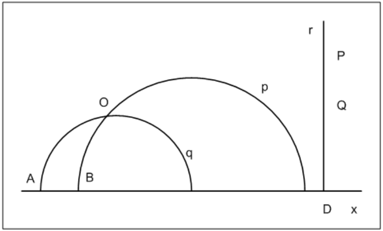
- Apstraktni sistem pojmova na kojima se zasniva deduktivna teorija omogućuje da se, dajući tim pojmovima konkretna značenja, formiraju različite teorije.
- Te interpretacije nazivamo **modelima**.
- Sistem aksioma jedne teorije ne mora da bude uvek jednoznačno odredjen.
- Konstrukcijom izvesnih modela želimo da omogućimo ustanovljavanje neprotivurečnosti teorije.

Ustanovljavanje neprotivurečnosti date teorije prema Gedelovom stavu moguće je isključivo na modelu iz te teorije koji je konstruisan na nekom drugom modelu neke teorije za koju znamo da je neprotivurečan.

Poenkareov model geometrije Lobačevskog

Interpretaciju planimetrije Lobačevskog konstruisaćemo u Euklidskoj ravni E^2 tj. otvorenoj Euklidskoj poluravni.

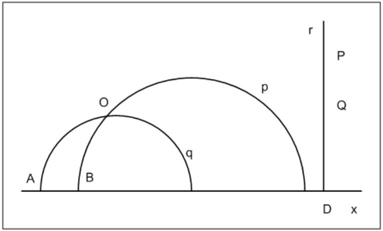
Bilo koju tačku neke otvorene Euklidske poluravni σ nazivamo *neeuklidskom tačkom*. *Neeuklidskom pravom* azivamo svaki Euklidov polukrug pomenuti ravni σ kome se središte nalazi na rubu te ravni. Taj rub obeležavamo sa x i nazivamo *apsolutom* neeuklidske ravni σ. Pravom nazivamo i svaku polupravu iz poluravni σ koja je upravna na rub x i čiji kraj pripada tom rubu.



Poenkareov model geometrije Lobačevskog

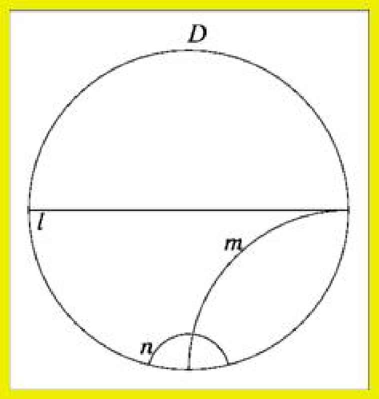
Interpretaciju planimetrije Lobačevskog konstruisaćemo u Euklidskoj ravni E^2 tj. otvorenoj Euklidskoj poluravni.

Bilo koju tačku neke otvorene Euklidske poluravni σ nazivamo *neeuklidskom tačkom*. *Neeuklidskom pravom* azivamo svaki Euklidov polukrug pomenuti ravni σ kome se središte nalazi na rubu te ravni. Taj rub obeležavamo sa x i nazivamo *apsolutom* neeuklidske ravni σ. Pravom nazivamo i svaku polupravu iz poluravni σ koja je upravna na rub x i čiji kraj pripada tom rubu.

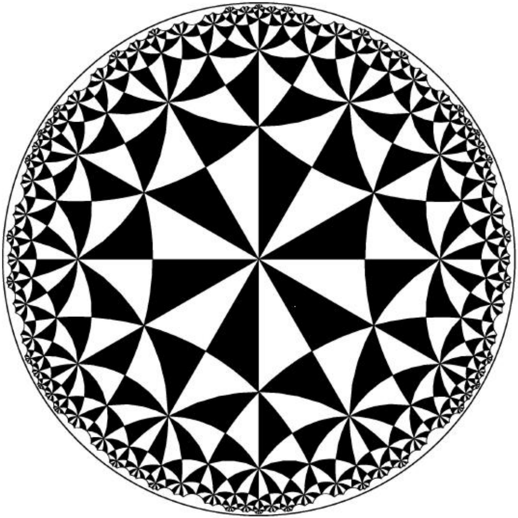


Poincaré disk model

Pored Poenkareovog modela, postoji još jedan prelep model ove geometrijije u Euklidskoj geometriji - **Poincaré disk model**.



Poincaré disk model



Eliptička geometrija

- Ukoliko sistemu aksioma apsolutne geometrije dodamo narednu aksiomu, dobijamo geometriju koju ćemo zvati *Eliptičkom geometrijom*.

Aksioma

Postoje prava a i tačka A van prava a, takve da u njima odredjenoj ravni kroz A ne prolaze prava koja sa a nema zajedničkih tačaka.

- Ravan i prostor u kome važe te aksiome nazivamo respektivno eliptičnom ravni i eliptičkim prostorom.

Eliptička geometrija

- Ukoliko sistemu aksioma apsolutne geometrije dodamo narednu aksiomu, dobijamo geometriju koju ćemo zvati *Eliptičkom geometrijom*.

Aksioma

Postoje prava a i tačka A van prava a, takve da u njima odredjenoj ravni kroz A ne prolaze prava koja sa a nema zajedničkih tačaka.

- Ravan i prostor u kome važe te aksiome nazivamo respektivno eliptičnom ravni i eliptičkim prostorom.