Funkcije generatrise

Funkcija generatrise: Neka je $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ niz realnih brojeva. Funkcija generatrise $a(x)$ niza a je stepeni red:

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Uopštena binomna teorema: Za proizvoljan realan broj α i proizvoljan prirodan broj k važi:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{k} x^k + \ldots$$

gde je binomni koeficijent definisan sa:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

Neke poznate funkcije generatrisa:

$$\sum_{n\geq 0} 1 \cdot x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot x^n = \ln \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \cdot x^n = e^x$$

$$\sum_{n\geq 0} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = \sin x$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = \cos x$$

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} = \arctan x$$

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n+k}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$$

Operacije sa funkcijama generatrisa: Neka su $a(x)$ i $b(x)$ funkcije generatrise za nizove $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ i $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$. Tada se mogu definisati sledeće operacije:

Sabiranje nizova: Niz $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$ ima funkciju generatrise $a(x) + b(x)$

Množenje niza skalarom: Niz $(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n, \ldots)$ ima funkciju generatrise $\alpha a(x)$, gde je $\alpha \in R$

Pomeranje niza udesno: Niz $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ ima funkciju generatrise $a(x)x^n$, gde je $n \in N$

Pomeranje niza ulevo: Niz $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ ima funkciju generatrise $\frac{a(x)-(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1})}{x^n}$, gde je $n \in N$

Zamena x sa αx: Niz $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^n a_n, \ldots)$ ima funkciju generatrise $a(\alpha x)$

Diferenciranje: Niz $(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, na_n, \ldots)$ ima funkciju generatrise $a'(x)$

Integracija: Niz $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}, \ldots)$ ima funkciju generatrise $\int_0^x a(t)dt$

Množenje funkcija generatrise: Proizvod $a(x)b(x)$ je funkcija generatrise za niz $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, gde je $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0$

Particije prirodnih brojeva: Particija π broja n u k delova, gde su n i k prirodni brojevi je familija $\pi = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, tako da je $n_i \in N$ i $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Funkcija generatrise za broj particija: Neka je p_n ukupan broj particija broja n. Funkcija generatrise za niz (p_n) je data sa:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}$$

Korektni nizovi zagrada: Korektan niz zagrada se definiše rekurzivno na sledeći način:
(i) Prazan niz zagrada je korektan
(ii) Ako su A i B korektni nizovi zagrada, tada je i niz AB korektan niz
(iii) Ako je A korektan niz zagrada onda je i (A) korektan niz
(iv) Svaki korektan niz zagrada se može dobiti konačnom primenom gornjih pravila.

Funkcija generatrise za Katalanove brojeve: Broj korektnih nizova sa n parova zagrada jednak je Katalanovom broju $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, dok je funkcija generatrise data sa:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Metod zmijskog ulja: Neka je data kombinatorna suma $S = f(n)$ koju treba izračunati sa slobodnom promenljivom n. Neka je $F(x)$ funkcija generatrise niza $f(n)$. Suma S se pomnoži sa x^n i sumira se po n; sada je funkcija generatrise dupla suma: spoljašnja po n, a unutrašnja je suma S. Sledeći korak je zamena redosleda sumiranja i nalaženje vrednosti unutrašnje sume po n. Na kraju identifikujemo koeficijente dobijenog izraza za funkciju generatrise, jer oni predstavljaju vrednost sume S u zavisnosti od n.

Linearna rekurentna jednačina: Linearna rekurentna jednačina reda k je jednačina oblika:

$$\alpha_0 a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n = f(n)$$

Početni uslovi su $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}$, gde su $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ relane konstante. Jednačina je homogena ako je $f(n) = 0$. Za funkciju generatrisa $A(t)$ rešenja jednačine (a_n) važi:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k) \cdot A(t) = \sum_{i=k}^{\infty} f(i)t^i + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{i} \alpha_{i-j} a_j \right) t^i$$

Fibonačijevi brojevi: Za Fibonačijev niz $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ važi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Funkcija generatrise je

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

1. Naći funkcije generatrise ako je:
$(i)\quad a_n = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$
$(ii)\quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$
$(iii)\quad a_n = 3^n + n$

2. Dokazati da za Fibonačijeve brojeve važi:

$$F_{n+2} + 1 = F_0 + F_1 + \ldots + F_n$$

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

3. Rešiti rekurentne jednačine i naći funkcije generatrisa:
$(i)\quad a_0 = 0,\ a_{n+1} = 2a_n + n$
$(ii)\quad a_0 = 2,\ a_1 = 0,\ a_2 = -2,\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$
$(iii)\quad a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n + n$
$(iv)\quad a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_{n+2} + 4a_{n+1} + 8a_n = 0$

4. Dokazati identitet:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$$

5. Dokazati identitet:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i+1}{i} 2^i = \frac{(-1)^{n+1} + 2^{n+2}}{3}$$

6. [Morijati] Da dato n i p izračunati:

$$\sum_k \binom{2n+1}{2p+2k+1} \binom{p+k}{k}$$

7. Dokazati identitet:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$$

8. Za prirodan broj n odrediti sumu:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = \sum_k \binom{n}{3k}$$

9. [Savezno 2001, modifikacija] Naći broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d tako da slovo a nikad nije susedno slovu b.

10. Naći funkciju generatrise i broj načina na koji se može u potpunosti prekriti pravougaonik dimenzija $n \times 2$ pomoću delova koji mogu da se rotiraju, ali ne i preklapaju:
(i) Kvadrat 1×1 i L figura sa 3 polja
(ii) Pravougaonik 1×2 i L figura sa 3 polja.

11. Odrediti broj različitih rastućih puteva u celobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do (n, n), koji nikada ne idu iznad prave $y = x$. Put je rastući ako ide samo nagore ili nadesno.

12. Odrediti broj različitih triangulacija konveksnog $(n + 2)$-tougla, pomoću $n - 1$ dijagonala koje nemaju zajedničkih tačaka u unutrašnjosti mnogougla.

13. Ispred blagajne čeka u redu $m+n$ ljudi koji žele da kupe kartu za predstavu. Karta košta 50 dinara, m ljudi ima novčanicu od 50 dinara, a n ljudi ima novčanicu od 100 dinara i važi $m \geq n$. Na koliko načina se ljudi mogu poredjati u niz prilikom kupovine karata, tako da niko ne čeka kusur, ako u blagajni na početku nema novaca?

14. [Erdoš] Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj njegovih particija na neparne delove jednak broju njegovih particija na različite delove.

15. [Putnam 1999] Posmatrajmo razvoj

$$\frac{1}{1-2x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Dokazati da je $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+2}$.

16. [Putnam 2000] Neka je S_0 konačan skup prirodnih brojeva. Definišimo skupove $S_1, S_2, \dots$ induktivno na sledeći način: prirodan broj a je u S_{n+1} ako i samo ako je tačno jedan od $a-1$ ili a u S_n. Dokazati da postoji beskonačno mnogo brojeva N za koje je $S_N = S_0 \cup \{N + a : a \in S_0\}$.

17. [IMC 2003] Neka je niz $(a_n)_{n\in N}$ definisan na sledeći način:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$$

Naći graničnu vrednost:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k}$$

18. Dat je niz: $f_1 = 1$, $f_{2n} = f_n$, $f_{2n+1} = f_n + f_{n+1}$. Dokazati da za funkciju generatrise niza $(f_n)_{n\in N}$, važi

$$F(x) = (1 + x + x^2)F(x^2)$$

19. [Predlog IMO 1998] Neka je $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, rastući niz prirodnih brojeva, tako da je svaki prirodan broj može na jedinstven način da se prikaže u obliku $a_i + 2a_j + 4a_k$, gde su indeksi i, j, k ne obavezno različiti. Odrediti a_{2005}.

20. [Turnir gradova 1981] Posmatrajmo sve kvadratiće (x, y) u celobrojnoj beskonačnoj mreži, gde se koordinate posmatraju u levom donjem uglu. Obeležimo polja $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)$. Ako je na polju (x, y) žeton, a polja $(x + 1, y)$ i $(x, y + 1)$ su slobodna, tada je dozvoljeno ukloniti žeton sa (x, y) i staviti po jedan žeton na polja $(x + 1, y)$ i $(x, y + 1)$. Da li je moguće ukloniti sve žetone sa obeleženih kvadratića, ako

(i) sva obeležena polja sadrže žeton

(ii) žeton se nalazi samo na polju $(0, 0)$?

21. Pretpostavimo da za neko n postoje nizovi prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$, takvi da su sume $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n$ i $b_1 + b_2, b_1 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n$ identične do na permutaciju. Dokazati da je n stepen dvojke.

22. [Predlog Republicko 2005] Neka je $x_1 = x_2 = 1$ i $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 8x_n - 1$, za $n \geq 1$. Dokazati da je x_n potpun kvadrat.

23. [IMO 1995] Neka je p neparan prost broj. Naći broj p elementnih podskupova A skupa $\{1, 2, 3, \dots, 2p\}$, tako da je suma elemenata u A deljiva sa p.

24. [Putnam 1991] Neka je p neparan prost broj. Dokazati da je

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$$

25. Za dati prirodan broj n dokazati da je ukupan broj nenegativnih celih rešenja sledećih jednačina jednak $n + 1$:

$$x + 2y = n$$

$$2x + 3y = n - 1$$

$$\dots$$

$$(n + 1)x + (n + 2)y = 0$$