Zimski seminar 2004. godine Petnica predavač: Aleksandar Ilić

Fibonačijev niz

Fibonačijev niz se definiše induktivno sa: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. [Binet] Opšti član niz je:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

2. Dokazati identitete $F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$ i $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$.

3. [Simson] Dokazati $F_{n+m+1} = F_n F_m + F_{m+1}F_{n+1}$ i $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.

4. Dokazati da je za svako n jedan od brojeva $5F_n^2 + 4$ i $5F_n^2 - 4$ potpun kvadrat.

5. Dokazati da je površina trougla čije su dužine stranica $\sqrt{F_{2n+1}}$, $\sqrt{F_{2n+3}}$ i $\sqrt{F_{2n+5}}$ jednaka $\frac{1}{2}$.

6. Dokazati identitete:
i) $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
ii) $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$
iii) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$
iv) $1 + F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$

7. Dokazati da važi $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, a zatim rešiti jednačinu $nF_nF_{n+1} = (F_{n+2} - 1)^2$.

8. Dokazati da $m|n$ ako i samo ako $F_m|F_n$.

9. [Honsberger] Dokazati da je $NZD(F_m, F_n) = F_{NZD(n,m)}$. Naći najveći zajednički delilac za F_{1988} i F_{1960}.

10. Dokazati da se izmedju n i $2n$ nalaze tačno jedan ili dva Fibonačijeva broja. Odrediti broj cifara F_{2004}.

11. Naći sve Fibonačijeve brojeve koji su stepeni dvojke ili stepeni sedmice.

12. [Zekendorf] Dokazati da se svaki prirodan broj može predstaviti u obliku zbira nekoliko Fibonačijevih brojeva, medju kojima nikoja dva nisu uzastopni.
Fibonačijev brojni sistem: $1 = 1$, $2 = 10$, $3 = 100$, $4 = 101$, $5 = 1000$, $6 = 1001$, $7 = 1010$,...

13. Dokazati

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 5^k \binom{n+1}{2k+1}$$

14. Dokazati da za svaki prirodni broj n postoji Fibonačijev broj deljiv sa n. Dokazati da je indeks najmanjeg takvog broja manji od n^2.

15. Dokazati da nijedan neparan Fibonačijev broj nije deljiv sa 17.

16. Na koliko načina tablu $2 \times n$ možemo da razložimo na domine 2×1? Koliko je medju njima različitih deljenja?

17. [Lukas] Dati su brojevi $1, 2, 3, \ldots, n$ na krugu. Na koliko načina je moguće odabrati nekoliko brojeva, medju kojima nema susednih na krugu?

18. Neka je α pozitivni koren jednačine $\alpha^2 = \alpha + 1$, koji je naziva zlatni presek. Tada imamo sledeći verižni razlomak:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ldots}}$$

Za niz $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n = 1 + \frac{1}{t_{\alpha-1}}$ dokazati da je $\alpha_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ i $F_{n+1} = \lfloor \alpha \cdot F_n + \frac{1}{2} \rfloor$.

19. Dokazati jednakosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = 4 - \alpha \qquad \prod_{n=2}^{\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{F_n^2}) = \alpha$$

20. Dokazati nejednakosti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots + \frac{F_n}{2^n} < 2$$

$$\frac{1}{F_1F_3} + \frac{1}{F_2F_4} + \frac{1}{F_3F_5} + \ldots + \frac{1}{F_nF_{n+2}} < 1$$

21. Za prost broj p jedan od brojeva F_{p-1}, F_p i F_{p+1} je deljiv sa p. Dokazati.

22. Naći sve parove prirodnih brojeva (a, b) takvih da važi $a|b^2 + 1$ i $b|a^2 + 1$.

23. [Withof] Date su dve gomile sa m i n kuglica i dva igrača naizmenično uzimaju ili proizvoljan broj kuglica sa jedne gomile ili po jednak broj kuglica sa obe gomile. Pobednik je onaj igrač koji uzme poslednju kuglicu. Odrediti pobedničku strategiju igrača u zavisnosti od m i n.

24. Funkcija f je definisana na nenegativnim brojevima i zadovoljava uslove:

$$f(4n) = f(2n) + f(n), \quad f(4n+2) = f(4n) + 1, \quad f(2n+1) = f(2n) + 1$$

Dokazati da je za svaki nenegativan broj m, broj onih n za koje je $0 \le n < 2^m$ i $f(4n) = f(3n)$ je $f(2^{m+1})$.

25. Da li postoji rastuća funkcija $f : N \to N$, takva da je $f(1) = 2$ i $f(f(n)) = f(n) + n$?