Uvod u bojenje grafova

1 Basics

Definicija 1.1 ***Graf*** *G je uredjeni par (V, E), gde je $E \subseteq \binom{V}{2}$. Elementi skupa V se zovu čvorovi, a elementi skupa E grane (ivice) grafa G.*

Definicija 1.2 *Posebne klase grafova:*

- ***Put*** *sa n čvorova je graf P_n, $n \in N$, sa skupom čvorova $\{1, 2, \ldots, n\}$ i skupom grana $\{\{i, i+1\} : i = 1, 2, \ldots, n-1\}$.*
- ***Ciklus*** *sa n čvorova je graf C_n, $n \in N$, sa skupom čvorova $\{1, 2, \ldots, n\}$ i skupom grana $\{\{i, i+1\} : i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{n, 1\}$.*
- ***Kompletan graf*** *sa n čvorova je graf K_n, $n \in N$, sa skupom čvorova $\{1, 2, \ldots, n\}$ i skupom grana $\binom{\{1,2,\ldots,n\}}{2}$.*

Definicija 1.3 *Pod* ***okolinom čvora*** *$u \in V$ grafa $G = (V, E)$ podrazumeva se skup $N_G(u) = \{v \in V : \{u, v\} \in E\}$ suseda čvora u.*

Definicija 1.4 ***Stepen čvora*** *u, $d_G(u) = |N_G(u)|$, jednak je broju suseda čvora u.*

Definicija 1.5 ***Najmanji stepen grafa*** *G je $\delta(G) = min_{u \in V} d_G(u)$, a* ***najveci stepen grafa*** *G je $\Delta(G) = min_{u \in V} d_G(u)$. Graf G je* ***r-regularan****, $r \in N$, ako je $\delta(G) = \Delta(G) = r$. Graf G je regularan ako postoji $r \in N$ tako da je G r-regularan graf.*

Definicija 1.6 *Graf $G' = (V', E')$ je* ***podgraf*** *grafa $G = (V, E)$, ako važi $V' \subset V$ i $E' \subset E \cap \binom{V'}{2}$.*

Definicija 1.7 *Graf $G' = (V', E')$ je* ***indukovani podgraf*** *grafa $G = (V, E)$, ako važi $V' \subset V$ i $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.*

Definicija 1.8 *Podskup $C \subset V$ čvorova grafa $G = (V, E)$ je* ***klika*** *ako su svaka dva čvora $x, y \in C, x \neq y$, susedna u G. Podskup $C \subset V$ čvorova grafa $G = (V, E)$ je* ***nezavisan skup*** *ako nikoja dva čvora $x, y \in C, x \neq y$, nisu susedna u G.*

Definicija 1.9 *Čvorovi u i v grafa G su povezani ako u G postoji put čiji su krajnji čvorovi u i v. Graf G je* ***povezan*** *ako su svaka dva njegova čvora povezana. Graf G je nepovezan ukoliko postoji bar jedan par čvorova koji nisu povezani. Komponente grafa G su njegovi maksimalni povezani indukovani podgrafovi.*

Definicija 1.10 *Graf $G = (V, E)$ je* ***bipartitan*** *ako postoji particija skupa čvorova $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tako da za svaku granu $e \in E$ važi da ona spaja čvor iz V_1 sa čvorom iz V_2.*

Definicija 1.11 *Povezan graf bez ciklusa naziva se* ***stablo****. Graf koji ne sadrši cikluse, tj. graf čija je svaka komponenta povezanosti stablo, naziva se* ***šuma****.*

Definicija 1.12 ***Razapinjajući pograf grafa*** *$G = (V, E)$ je podgraf oblika $(V, E'), E' \subseteq E$.* ***Razapinjajuće stablo*** *je razapinjajući podgraf koji je stablo, a razapinjajuća šuma je razapinjajući podgraf koji je šuma.*

2 Bojenje čvorova

Definicija 2.1 *Graf $G = (V, E)$ je k obojiv ako se svakom čvoru može dodeliti jedna od k boja $\{1, 2, \ldots, k\}$ tako da su susedni čvorovi obojeni različitim bojama, tj. to je funkcija $f : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, tako da za svaku ivicu $e = uv \in E$ važi $f(u) \neq f(v)$. To je particija skupa V u k nezavisnih skupova $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, gde je $V_i = \{v | f(v) = i\}$.*

Definicija 2.2 *Hromatski broj $\chi(G)$ je minimalno k za koje je graf G obojiv.*

Lema 2.1 *Za graf $G = (V, E)$, $|V| = n$ i $|E| = m$, i njegov hromatski broj $\chi(G)$ važi:*

1. $1 \leq \chi(G) \leq n$

2. $\chi(K_n) = n$ *i* $\chi(\overline{K_n}) = 0$

3. $\chi(P_n) = 2$

4. $\chi(C_{2n}) = 2$ *i* $\chi(C_{2n+1}) = 3$

5. $\alpha(G) \leq \chi(G)$, *gde je* $\alpha(G)$ *najveća klika u grafu,*

6. $\lceil \frac{n}{I(G)} \rceil \leq \chi(G)$, *gde je* $I(G)$ *najveći nezavisni skupu,*

7. $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$

Teorema 2.1 *Za svaki graf* G*, važi:* $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Definicija 2.3 *Graf* G *je kritičan ako za svaki podgraf* $H < G$ *važi* $\chi(H) < \chi(G)$*. Graf je* k *-kritičan ako je kritičan i ako je* $\chi(G) = k$.

Lema 2.2 *Ako je graf* G k *-kritičan, tada je* $\delta(G) \geq k - 1$ *i povezan je.*

Lema 2.3 *Svaki* k *-hromatski graf ima bar* k *čvorova stepena bar* $k - 1$.

Definicija 2.4 *Neka je* S *čvorni presek i* $G - S$ *ima komponente* $V_1, V_2, \ldots, V_c$*. Tada se podgrafovi* $G_i = G[V_i \cup S]$*, nazivaju* S *-komponente od* G.

Lema 2.4 *U kritično grafu nema čvornog preseka koji je klika.*

Posledica 2.5 *Svaki kritičan graf nema artikulacionih tačaka.*

Definicija 2.5 *Ukoliko u svakom bojenje* G_i $\{u, v\}$*-komponente grafa* G*, pridružuje čvorovima* u *i* v *iste (rasličite) boje, tada se za graf* G_i *kaže da je tipa 1 (2).*

Teorema 2.2 (Dirac, 1953) *Neka je graf* G k *-kritičan sa dvočvornim presekom* $\{u, v\}$*. Tada važi:*

- $G = G_1 \cup G_2$*, gde je* G_i $\{u, v\}$ *-komponenta tipa* i*,* $(i = 1, 2)$
- *grafovi* $G_1 + uv$ *i* $G_2 \cdot uv$ *su* k *-kritični.*

Lema 2.6 *Neka je graf* G k *-kritičan i neka je* u, v *njegov dvočvorni presek. Tada važi da je* $d(v) + d(u) \geq 3k - 5$.

Teorema 2.3 (Brooks, 1941) *Ako je* G *povezan graf koji nije* K_n *ili* C_{2n+1}*, tada se može obojiti sa* $\Delta \geq 3$ *boja.*

Teorema 2.4 (Hajos conjecture, 1961) *Ako je graf* G k *-hromatski, onda* G *sadrži subdivision* K_k.

Teorema 2.5 (Blanches Descartes, 1954) *Za svaki prirodan broj* k*, postoji* k *-hromatski graf koji ne sadrži trouglove.*

Definicija 2.6 *Graf* G *je planaran ako se može nacratati u ravni tako da nema presecanja (osim u čvorovima) medju ivicama.*

Teorema 2.6 (Euler, 1750) *Ako je* G *povezan planaran graf tada važi:* $|V| - |E| + |F| = 2$.

Lema 2.7 *Svaki planaran grafa ima barem jedna čvor stempena manjeg od* 6.

Lema 2.8 *Svaki planaran graf* 5 *obojiv.*

Teorema 2.7 (Four-coloring theorem) *Svaki planaran graf je* 4 *obojiv.*

Teorema 2.8 *Graf je bipartitan akko nema ciklus neparne dužine.*

Teorema 2.9 *Graf* G *je 2-hromatski akko je bipartitan.*

3 Hromatski polinomi

Definicija 3.1 (Brirkhoff, 1912) *Broj različitih k -bojenje grafa G je $\Pi_k(G)$, gde su dva bojenja ekvivalentna ako je $c(V_i) = c'(V_i)$.*

Lema 3.1
- $\Pi(\overline{K_n}) = 0$
- $\Pi(K_n) = k(k-1)\dots(k-n+1)$
- $\Pi(T_n) = k(k-1)^{n-1}$
- $k < \chi(G) \Rightarrow \Pi_k(G) = 0$

Teorema 3.1 *Ako je G prost graf i $e = uv$ ivica, tada važi $\Pi_k(G) = \Pi_k(G-e) - \Pi_k(G \cdot e)$.*

Teorema 3.2 *$\Pi_k(G)$ je polinom od k stepena $|V|$ sa celobrojnim koeficientima, sa najstarijim koeficientom 1 i najmanjim koeficientom 0, gde koeficienti $\Pi_k(G)$ alterniraju u znaku.*

Posledica 3.2 *Koeficient uz k^{n-1} u hromatskom polinumu je $-|E|$.*

Posledica 3.3 *$\Pi_k(G_i) = \Pi_k(G_1)\Pi_k(G_2)\dots\Pi_k(G_c)$, gde su $\{G_1, G_2, \dots G_c\}$ komponenta grafa G.*

4 Bojenje ivica

Definicija 4.1 *k -ivično bojenje grafa G je dodeljivanje boja $\{1, 2, \dots k\}$ ivicama, tako da su svake dve ivice koje imaju zajednički čvor obojene različitim bojama. To je particija skupa čvorova na mečinge $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$. Najmanji broj k za koji postoji k -ivično bojenje grafa G naziva se ivični hromatski broj, i označava se sa $\chi'(G)$.*

Lema 4.1
1. *$\chi'(G) \geq \Delta$,*
2. *$\chi'(G) \leq 2\Delta - 2$ (First-Fit),*
3. *$\chi'(G) \geq \lceil \frac{m}{MG)} \rceil$, gde je $M(G)$ najveći mečing u grafu,*
4. *$\chi'(C_{2n}) = 2$ i $\chi'(C_{2n+1}) = 3$*

Teorema 4.1 *$\chi'(K_n) = n$ ako je n parno i $\chi'(K_n) = n-1$ ako je n neparno.*

Definicija 4.2 *Zatvorena staza koja prolazi kroz sve grane grafa G naziva se Ojlerova kontura. Staza, koja nije zatvorena i koja prolazi kroz sve grane grafa G, naziva se Ojlerov put. Graf $G = (V, E)$ je Ojlerov ukoliko sadrži Ojlerovu konturu.*

Lema 4.2 *Ako je G graf čiji su stepeni svakog čvora bar 2, onda on sadrži ciklus.*

Teorema 4.2 *Graf je Ojlerova akko je povezan i svaki čvor ima paran stepen.*

Teorema 4.3 *Neka je G povezan graf koji nije neparan ciklus. Tada G ima 2-bojenje, gde su obe boje prisutne kod svakog čvora,, stepena većeg od 1.*

Teorema 4.4 (Konig) *Za svaki bipartitan graf $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Teorema 4.5 (Vizing, 1964) *Ako je graf G prost tada je $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.*

Teorema 4.6 (General Vizing) *Ako je graf G i μ najveći broj ivica koje spajaju dva čvora, tada je $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + \mu$.*

5 List-coloring

Definicija 5.1 *List-coloring je sledeći problem: za graf $G = (V, E)$ i za svaki čvor iz G data je lista dozvoljenih boja za čvor, $(S_v)_{v \in V}$. Potrebno je obojiti graf tako da susedni čvorvi budu obojeni različitim bojama. Graf je k-list obojiv ako za svaku familiju skupova sa $|S_v| = k$ postoji list-coloring za G. Najmanje takvo k je list hromatski broj $ch(G)$. Analogno se definiše i list hromatski indeks $ch'(G)$.*

6 Dinitz problem

Teorema 6.1 (Dinitz, 1978) *Data je matrica* $n \times n$, *i neka je za svako polje* (i, j) *tada lista od* n *boja,* $C(i, j)$. *Tada je uvek moguće svako polje obojiti jednom od boja iz njegove liste, tako da polja u istoj vrsti i kolini imaju različite boje.*

Definicija 6.1 *Neka je* $\overrightarrow{G} = (V, E)$ *usmeren graf. Kernel* $K \subseteq G$ *je podgrag grafa* G *tako da važi:*

1. K *je nezavistna u* G,
2. *za svaki čvor* $u \in \overline{K}$ *postoji* $v \in K$ *tako da* $uv \in E$.

Lema 6.1 *Neka je* $\overrightarrow{G} = (V, E)$ *usmeren graf, i neka za svaki čvor* $v \in V$, *imamo da važi da je* $|C(v)| \geq d^+(v)+1$. *Ako svaki indukovani podgraf od* $\overrightarrow{G}$ *poseduje kernel, tada postoji list-coloring za* G.

Definicija 6.2 (Stable merriages) *Mečing* M *bipartitnog grafa* $G = (X \cup Y, E)$ *se zove stabilan ako važi sledeći uslov: sa svaku ivicu* $uv \in \overline{M}$, $u \in X$ *i* $v \in Y$, *onda ili postoji* $uy \in M$ *tako da je* $y > v$ *u* $N(u)$ *ili* $xv \in M$ *tako da je* $x > u$ *i* $N(v)$, *ill oba, gde je* $N(v), v \in X \cup Y$, *rank lista suseda čvorova* v.

Teorema 6.2 *Za svaki bipartitan graf postoji stabilni mečing.*

Definicija 6.3 *Latinski kvadrat je matrica veličine* $n \times n$ *popunjena brojevima od 1 do* n *tako da se svaki broj pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i u svakoj koloni.*

Teorema 6.3 *Za svako* $n \in N$ *važi* $ch_l(S_n) = n$.

7 Heuristike za bojenje grafova

- Zykov tree
- Recursive Largest First - RLF
- Sequential Coloring - SC
- Degree of Saturation - DSATUR
- Backtracking Sequential Coloring - BSC
- Incomplete Backtracking Sequential Coloring (K) - IBSC(K)
- Tree Coloring

References

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, North-Holland, Oxford, 1976

[2] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag 1997

[3] Walter Klotz, *Graph Coloring Algorithms*, Mathematik-Bericht 5 (2002), 1-9, TUClausthal

[4] Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, 2003